

ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN DE  
PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN PARA EL CASO COLOMBIANO

DEYSI YANIRA BENAVIDES RAMÍREZ  
NELSON EDUARDO GARAVITO LEÓN

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
FACULTAD DE INGENIERÍA INDUSTRIAL  
MAESTRÍA EN INVESTIGACIÓN OPERATIVA Y ESTADÍSTICA  
COHORTE XIII, Convenio UTP-FUAC  
BOGOTÁ  
2019

ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN DE  
PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN PARA EL CASO COLOMBIANO

DEYSI YANIRA BENAVIDES RAMÍREZ  
NELSON EDUARDO GARAVITO LEÓN

TRABAJO DE GRADO

ASESOR: Carlos Osorio Ramírez, PhD

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
FACULTAD DE INGENIERÍA INDUSTRIAL  
MAESTRÍA EN INVESTIGACIÓN OPERATIVA Y ESTADÍSTICA  
COHORTE XIII, Convenio UTP-FUAC  
BOGOTÁ  
2019

## CONTENIDO

	Pag
1. JUSTIFICACIÓN	14
2. OBJETIVOS	15
2.1 OBJETIVO GENERAL	15
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	15
3. METODOLOGÍA	16
4. MARCO TEÓRICO	22
4.1 MODELO DE SEMIVARIANZA	24
4.1.1 Coeficiente Beta	25
4.1.2 Tasa de interés Libre de Riesgo	26
4.1.3 Rendimiento del mercado	26
4.1.4 La recta del mercado de valores SML	26
4.2 MODELO DE SIMULACIÓN DE MONTECARLO	30
4.3 MODELO DE BLACK-LITTERMAN	33
4.4 MODELOS ARCH Y GARCH PARA ESTIMAR LA VOLATILIDAD	
DEL MODELO DE MARKOWITZ	36
4.4.1 El modelo VECM Diagonal	41
4.4.2 El modelo BEKK	41
4.4.3 El modelo BEKK Diagonal	41

4.4.4 El modelo condicional de correlación constante	42
5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	46
5.1 Portafolios de inversión siguiendo la metodología de Markowitz	49
5.2 Portafolios de inversión siguiendo el modelo de Semivarianza	52
5.3 Portafolios de inversión siguiendo la simulación por Montecarlo	53
5.4 Portafolios de inversión siguiendo el modelo de Black-Litterman	57
5.5 Portafolios de inversión a través de los modelos ARCH-GARCH	62
6. CONCLUSIONES	89
ANEXOS	94
BIBLIOGRAFÍA	106

## LISTA DE TABLAS

	Pag
Tabla 1	Ventajas y desventajas de los modelos 44
Tabla 2	Estadística descriptiva de las acciones 46
Tabla 3	Estadística descriptiva de las series 48
Tabla 4	Vector de medias sobre los retornos 50
Tabla 5	Matriz de varianza covarianza no condicional 50
Tabla 6	Portafolio según Markowitz 51
Tabla 7	Datos para cálculo del modelo Semivarianza 52
Tabla 8	Matriz de correlaciones Semivarianza 52
Tabla 9	Matriz de covarianzas Semivarianza 53
Tabla 10	Portafolio según el modelo de Semivarianza 53
Tabla 11	Ajuste de datos Montecarlo 55
Tabla 12	Matriz de correlaciones Montecarlo 55
Tabla 13	Vector de Medias Montecarlo 55
Tabla 14	Matriz de varianzas Montecarlo 56
Tabla 15	Portafolio según el método de Montecarlo 56
Tabla 16	Ponderaciones de las acciones sobre el COLCAP 57
Tabla 17	Ponderaciones $w$ 58
Tabla 18	Vistas del experto en renta variable 59
Tabla 19	Perspectivas sobre las vistas 59
Tabla 20	Matriz $\Omega$ diagonal 59
Tabla 21	Matriz de correlaciones de los retornos 60

Tabla 22	Retorno esperado	60
Tabla 23	Matriz de varianza covarianza sobre los retornos esperados	61
Tabla 24	Portafolio según el modelo de Black – Litterman	61
Tabla 25	Prueba de raíz unitaria	67
Tabla 26	Prueba de raíz unitaria para las series diferenciadas	68
Tabla 27	Modelos ARIMA	69
Tabla 28	Prueba de White	70
Tabla 29	Coeficientes para la varianza de los retornos de Bancolombia EGARCH(1,3)	71
Tabla 30	Coeficientes para la varianza de los retornos de Grupo Sura GARCH(1,1)	71
Tabla 31	Coeficientes para la varianza de los retornos de Nutresa GARCH(1,1)	72
Tabla 32	Coeficientes para la varianza de los retornos de Isa GARCH(1,1)	72
Tabla 33	Coeficientes para la varianza de los retornos de Grupo Argos GARCH(1,1)	72
Tabla 34	Coeficientes para la varianza de los retornos de Aval GARCH(1,1)	73
Tabla 35	Coeficientes para la varianza de los retornos de Cemento Argos GARCH(1,0)	73
Tabla 36	Coeficientes para la varianza de los retornos de Banco Bogotá GARCH(1,0)	73
Tabla 37	Prueba de heteroscedasticidad de los residuos al cuadrado para los modelos ARCH-GARCH	74
Tabla 38	Autocorrelación y autocorrelación parcial Bancolombia	75
Tabla 39	Autocorrelación y autocorrelación parcial Gruposura	76
Tabla 40	Autocorrelación y autocorrelación parcial Nutresa	76
Tabla 41	Autocorrelación y autocorrelación parcial Isa	77
Tabla 42	Autocorrelación y autocorrelación parcial Grupo Argos	77
Tabla 43	Autocorrelación y autocorrelación parcial Grupo Aval	78
Tabla 44	Autocorrelación y autocorrelación parcial Cementos Argos	78

Tabla 45	Autocorrelación y autocorrelación parcial Banco de Bogotá	79
Tabla 46	Varianza condicional estimada para el año siguiente	79
Tabla 47	Matriz de varianza covarianza condicional	80
Tabla 48	Portafolio según los modelos ARCH-GARCH	80
Tabla 49	Valores mínimo y máximo para el riesgo pronosticado para cada modelo	82
Tabla 50	Retorno estimado versus Retorno real	84
Tabla 51	Comportamiento de los portafolios por modelo	85
Tabla 52	Valores esperados de los retornos para para el mínimo y máximo riesgo vs Valores reales	87
Tabla 53	Portafolio con máximo retorno real en cada modelo	87

## LISTA DE FIGURAS

	Pag
Figura 1      Frontera eficiente	23
Figura 2      Histograma Cotizaciones diarias de las acciones	47
Figura 3      Diagrama de series de tiempo	49
Figura 4      Frontera eficiente según Markowitz	51
Figura 5      Frontera eficiente según el modelo de Semivarianza	54
Figura 6      Frontera eficiente según la simulación por Montecarlo	57
Figura 7      Frontera eficiente según el modelo Black-Litterman	62
Figura 8      Diagrama de serie de tiempo asociada a Bancolombia	63
Figura 9      Diagrama de serie de tiempo asociada a Grupo Sura	63
Figura 10      Diagrama de serie de tiempo asociada a Nutresa	64
Figura 11      Diagrama de serie de tiempo asociada a ISA	64
Figura 12      Diagrama de serie de tiempo asociada a Grupo Argos	65
Figura 13      Diagrama de serie de tiempo asociada a Grupo Aval	65
Figura 14      Diagrama de serie de tiempo asociada a Cementos Argos	66
Figura 15      Diagrama de serie de tiempo asociada a Banco Bogotá	66
Figura 16      Frontera eficiente según los modelos ARCH-GARCH	81
Figura 17      Frontera eficiente Modelos propuestos	82
Figura 18      Riesgo estimado por modelo	83
Figura 19      Retorno esperado por portafolio	83
Figura 20      Comportamiento de los portafolios según modelo	86



## LISTADO DE ANEXOS

	Pag
 Función de autocorrelación y autocorrelaciones	
Anexo 1      Bancolombia	94
Anexo 2      Gruposura	94
Anexo 3      Nutresa	95
Anexo 4      Isa	95
Anexo 5      Grupo Argos	96
Anexo 6      Grupo Aval	96
Anexo 7      Cementos Argos	97
Anexo 8      Banco de Bogotá	97
 Estimación de los modelos ARMA	
Anexo 9      Modelo ARMA(1,0) Bancolombia	98
Anexo 10      Modelo ARMA(1,0) Gruposura	98
Anexo 11      Modelo ARMA(1,1) Nutresa	99
Anexo 12      Modelo ARMA(1,1) Isa	99
Anexo 13      Modelo ARMA(5,0) Grupo Argos	100
Anexo 14      Modelo ARMA(1,0) Grupo Aval	100
Anexo 15      Modelo ARMA(0,1) Cementos Argos	101
Anexo 16      Modelo ARMA(1,1) Banco de Bogotá	101
 Identificación de los parámetros de los modelos GARCH	
Anexo 17      Modelo EGARCH(1,3) Bancolombia	102
Anexo 18      Modelo GARCH (1,1) Gruposura	102

Anexo 19	Modelo GARCH(1,1) Nutresa	103
Anexo 20	Modelo GARCH(1,1) Isa	103
Anexo 21	Modelo GARCH(1,1) Grupo Argos	104
Anexo 22	Modelo GARCH(1,1) Grupo Aval	104
Anexo 23	Modelo GARCH(1,0) Cementos Argos	105
Anexo 24	Modelo GARCH(1,0) Banco de Bogotá	105

## RESUMEN

Los portafolios de inversión en renta variable han capturado la atención de los investigadores en finanzas con el ánimo de reducir los riesgos en aras de un incremento de los retornos a través de la implementación de nuevas estrategias y modelos que permitan aumentar la confianza de los inversionistas. El economista Harry Markowitz en 1952 implementó un modelo para la conformación de portafolios de inversión que tiene en cuenta no solo el retorno histórico de los activos sino que además vincula el riesgo asociado a los mismos a través de un modelo de programación cuadrática, el modelo de media – varianza, que le indica a los inversionistas cuál debe ser el retorno mínimo esperado ante un determinado riesgo establecido, dicha estrategia permite encontrar la frontera eficiente sobre la cual se encuentra la combinación de activos que tendría que elegir un inversionista. Dicho modelo tuvo gran aceptación especialmente a nivel teórico, pero la implementación en el sector real presentó grandes dificultades dada la complejidad de las operaciones. Gracias al desarrollo de nuevas tecnologías y de software especializado el modelo se pudo implementar como estrategia de inversión, aunque posteriormente se identificaron algunos inconvenientes propios del modelo como la falta de inclusión de la percepción que tiene el experto inversor sobre el comportamiento de los activos, por otro lado, no se tiene en cuenta la falta de homogeneidad de la varianza en los retornos. Otra de las críticas del modelo está en el manejo simétrico que tienen los movimientos al alza o a la baja, teniendo en cuenta que los movimientos al alza no generan nerviosismo. Dichos inconvenientes del modelo de media – varianza dio origen a nuevas teorías que modificaban y mejoraban el modelo original, dichas modificaciones fueron realizadas y probadas sobre economías estables, ahora bien, ¿qué impacto tienen estas modificaciones sobre el modelo de Markowitz en economías emergentes como la colombiana? Y ¿cómo se comportan los resultados obtenidos con los reportados en la literatura?

Para dar respuesta al problema y objetivos de la investigación se tomó la cotización diaria de acciones del COLCAP que hayan cotizado por lo menos entre 1 de julio de 2007 y el 29 de junio de 2018 con retornos mayores a cero, estas fueron: Bancolombia, Gruposura, Nutresa, Isa, Grupoargos, Grupoaval, Cementos Argos y Banco de Bogotá, se hace una revisión bibliográfica y se seleccionan los siguientes modelos: Simulación por el método de Montecarlo, el modelo de Black-Litterman, el modelo de semivarianza y los modelos de heteroscedasticidad condicional autorregresiva (Arch-Garch). La simulación por el método de Montecarlo encuentra la frontera eficiente evitando el trabajo de realizar complicadas operaciones. El modelo de Black-Litterman permite vincular la percepción que tiene el inversor sobre el comportamiento del precio de las acciones facilitando la construcción de modelos con mayor robustez. El modelo de semivarianza solo tiene en cuenta los movimientos adversos en el precio de la acción, que son los que más preocupación e impacto generan en los inversores y en el precio mismo. En los modelos Arch-Garch se aborda la distribución no homogénea de los retornos o heteroscedasticidad, situación clásica en la distribución de retornos en renta variable.

La base de datos se dividió en dos grupos: el primero comprendido entre 1/07/2007 hasta 29/06/2018 que se usó en la construcción de los modelos, y el segundo entre 4/07/2017 hasta 29/06/2018 usado para comparar el comportamiento de los pronósticos contra los datos reales. Se construyeron los modelos y se midió el desempeño que tuvieron contra la tasa libre de riesgo, que es lo mínimo que un inversor estaría dispuesto a rentar, además se compararon los resultados con los obtenidos con el modelo de Markowitz para identificar el impacto que tienen las modificaciones propias de cada modelo.

Se encontró que las modificaciones hechas por los modelos Arch-Garch producen los mejores resultados, permitiendo encontrar portafolios de inversión todos ellos con retornos reales superiores a la tasa libre de riesgo y mayores también que los proporcionados por el modelo de Markowitz, con un riesgo entre moderado y bajo,

además los resultados se encuentran alineados con lo reportado en estudios similares. El modelo de semivarianza aunque con un riesgo más conservador tuvo un retorno inferior que el proporcionado por el de Markowitz pero superior a la tasa libre de riesgo. El modelo de Black-Litterman presentó retornos negativos en la mayoría de los portafolios, y por tanto, estos resultados no se encuentran alineados con las investigaciones analizadas en esta investigación, sin embargo, los resultados adversos no provienen del modelo mismo si no del impacto que tiene la percepción del inversor, para este caso, los movimientos al alza en el precio de las acciones esperadas por el inversor realmente resultaron en pérdida de valor, por tal motivo se sugiere el consenso de varios puntos de vista o el uso de técnicas que mitigan una vista pobre sobre los retornos de las acciones como lo plantea (Silva, Pinheiro, & Poggi, 2017). En el modelo de simulación por Montecarlo se obtuvieron desempeños significativamente inferiores al de Markowitz y a la tasa libre de riesgo e igual que en el modelo de Black-Litterman los retornos fueron negativos en su mayoría.

## 1. JUSTIFICACIÓN

Los portafolios de inversión han llamado la atención de un sin número de investigadores, teniendo en cuenta que los insumos “el dinero” en la conformación de carteras es un bien escaso que merece una planeación estratégica que permita reducir los riesgos e incrementan las utilidades. Harry Markowitz, premio Nobel de Economía en 1990, propuso una idea revolucionaria en la conformación de portafolios de inversión, con el modelo de media varianza, basado en el comportamiento de los activos en el pasado que permite determinar la frontera eficiente gracias a un modelo de programación cuadrática, donde se busca el máximo rendimiento esperado para un nivel de riesgo establecido, o en su forma equivalente, el mínimo riesgo, dado un rendimiento esperado (Mendizábal y otros 2002). Dicho modelo, a pesar del gran impacto en el mundo de las finanzas, ha tenido críticas que han limitado su implementación, como la falta de inclusión de la percepción del inversor y la baja diversificación de activos en los portafolios. Con el ánimo de subsanar dichos inconvenientes se han propuesto modificaciones que producen mejores resultados como el realizado por Black y Litterman, donde se vincula información adicional a través de la teoría de Bayes (Franco y otros 2011) o las estimaciones de la volatilidad a través de simulación por el método de Montecarlo o los modelos ARCH.

Teniendo en cuenta que las modificaciones propuestas han sido elaboradas bajo economías desarrolladas, nos surge la siguiente pregunta: ¿De qué manera impactan las modificaciones hechas por Black y Litterman, el modelo de semivarianza y las estimaciones de la volatilidad por modelos ARCH o por simulación por Montecarlo al modelo de Markowitz en la conformación de portafolios de inversión en economías emergentes como la colombiana?

## 2. OBJETIVOS

Los propósitos que orientan este trabajo de grado se describen a continuación.

### 2.1 OBJETIVO GENERAL

Contrastar diferentes métodos basados en las finanzas cuantitativas o en la investigación de operaciones para el diseño de portafolios de inversión de renta variable en el mercado bursátil colombiano.

### 2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Realizar un estudio del estado del arte de los distintos métodos existentes basados en las finanzas cuantitativas o investigación de operaciones para la conformación de portafolios de inversión.
- Adaptar los modelos seleccionados para la conformación de portafolios en el mercado bursátil colombiano.
- Realizar un análisis estadístico comparativo entre los resultados de los modelos seleccionados.

### 3. METODOLOGÍA

A partir de la pregunta y los objetivos planteados en este proyecto se realizó una investigación explicativa de tipo cuantitativo que permita identificar los efectos que tienen las modificaciones hechas al modelo de Semivarianza, simulación por Montecarlo, Black-Litterman y los modelos Arch-Garch al modelo de Markowitz en la conformación de portafolios de inversión para el caso colombiano, además de comparar estos resultados con los reportados en investigaciones similares, para lo cual fue necesario la recolección de datos sobre la cotización diaria de activos que hayan estado cotizando por lo menos en el periodo comprendido entre el 1 de julio de 2007 hasta el 29 de junio de 2018 y que hacen parte del COLCAP (índice de capitalización que refleja las variaciones de los precios de las acciones más líquidas de la bolsa de valores de Colombia) (banrep, 2018), además atendiendo a la imposibilidad de ventas en corto en el mercado de valores en Colombia, se excluyen las acciones que tienen retornos promedios menores o iguales a cero, entendido el retorno como la diferencia del logaritmo neperiano de la cotización de un día menos el logaritmo neperiano de la cotización del día anterior ( $Ln_t - Ln_{t-1}$ ). Bajo estos criterios se trabajó con las siguientes acciones: BANCOLOMBIA, GRUPOSURA, NUTRESA, ISA, GRUPOARGOS, GRUPO AVAL, CEMENTOS ARGOS y BANCO DE BOGOTA, datos que fueron obtenidos del portal financiero del Grupo Aval (GrupoAval, 2018).

La base de datos se dividió en dos grupos: el primero comprendido entre el 1/07/2007 hasta el 30/06/2017 sobre los cuales se construyen los modelos que hacen parte del presente trabajo de investigación, y el segundo entre 4/07/2017 hasta 29/06/2018 que se usó para comparar el comportamiento de los pronósticos de los modelos con los datos reales.

Se procede a consultar la literatura e investigaciones que plantean modificaciones o modelos alternos que den solución a algunos inconvenientes presentes en el



modelo de Markowitz para aplicarlos sobre la base diferenciada. A continuación, se presentan los modelos seleccionados y su justificación.

- El modelo de Semivarianza que vincula al modelo de Markowitz solamente los movimientos a la baja del precio de los activos, atendiendo al comportamiento asimétrico del mercado ante el incremento o pérdida de valor de las acciones. En momentos donde el activo gana valor no se crea pánico financiero y los inversores mantienen sus inversiones o las incrementan, pero un movimiento adverso crea movimientos significativos en los retornos y por consiguiente en el riesgo.
- En la simulación por el método de Montecarlo, se construye la frontera eficiente evitando el costo operacional que lleva implícito el modelo de Markowitz, especialmente en los momentos cuando el desarrollo tecnológico no se ocupaba de dichos cálculos.
- El modelo de Black-Litterman vincula la percepción que tiene el experto inversor sobre el comportamiento de los activos al modelo de Markowitz, además de calcular el valor estimado de los retornos cuando estos se encuentran en equilibrio, es decir, cuando la oferta iguala la demanda, haciendo al modelo más robusto.
- Los modelos Arch-Garch estiman la volatilidad bajo un escenario de heteroscedasticidad o de varianza no homogénea, característica típica de los retornos con activos de renta variable. En el modelo de Markowitz se estima la volatilidad a través de la varianza de los datos históricos sin tener en cuenta si éstos son o no homoscedásticos o estables en el tiempo. La presencia de heteroscedasticidad es un indicador de agrupamiento de la volatilidad, es decir, existen momentos de alta volatilidad seguido de otros de baja volatilidad que persisten por determinado tiempo y, por ende, el pasado reciente del riesgo tiene mayor peso sobre la estimación del riesgo en un futuro cercano que la información proveniente de momentos lejanos. Una vez

es estimada la volatilidad con los modelos Arch-Garch se vincula al modelo de optimización de Markowitz para construir la frontera eficiente.

Una vez seleccionados los modelos, se procede a la construcción de estos atendiendo a los requerimientos propios de cada uno de modo que se pueda determinar cuál es el impacto que tienen sus resultados al compararlos con los obtenidos con el modelo de Markowitz y bajo una economía emergente como la colombiana. Cabe destacar que los citados modelos fueron desarrollados e implementados sobre economías sólidas.

A continuación, se indican los pasos en la construcción de cada modelo:

En el modelo de Semivarianza, se realizan los siguientes cálculos usando Excel:

- Se calcula la diferencia de los logaritmos neperianos para el índice COLCAP.
- Cálculo de la media aritmética de los retornos para cada activo y también para el índice COLCAP.
- Se calcula la desviación estándar de los retornos menores o iguales que cero o “Downside” para los activos.
- Se obtiene la cosemivarianza entre los valores menores o iguales que cero del COLCAP y los retornos menores o iguales que cero de cada acción.
- Se obtiene la semivarianza, correspondiente a la varianza entre los valores menores o iguales que cero de los retornos del COLCAP.
- Se obtiene el Downside Beta calculado como el cociente de cada dato de la cosemivarianza entre la semivarianza.
- Se calcula el exceso de retorno o D-CAPM, calculando el cociente entre la diferencia de la media de retorno y la tasa libre de riesgo con el correspondiente valor de Downside.
- Se calcula la matriz de correlaciones de los retornos de las acciones.
- Se obtiene la matriz de varianza y covarianza.

- Se usa la herramienta solver de Excel para encontrar el mínimo valor de la desviación estándar y su retorno asociado y el máximo retorno con su respectiva desviación estándar, una vez identificados el valor máximo y mínimo de la desviación estándar se encuentran diez puntos equidistantes entre estos valores y se optimiza el retorno para cada valor de la desviación estándar.

Para la simulación por el método de Montecarlo se usa el complemento Crystal Ball de Excel con los siguientes pasos:

- Se cargan los datos de los retornos históricos de las acciones.
- Como los retornos no se ajustan a una distribución normal, se hace necesario encontrar la distribución de probabilidad que mejor ajusta los retornos de cada activo con sus respectivos parámetros.
- Se calcula la matriz de correlaciones.
- Se utiliza la opción “OptQuest” para llevar a cabo la simulación y obtener el valor estimado de los retornos según la distribución de probabilidad que ajusta los datos.
- Se calcula la matriz de varianzas y covarianzas.
- Una vez determinados los valores de los retornos esperados, la matriz de correlaciones y la matriz de varianzas y covarianzas, se construye la frontera eficiente usando la herramienta solver de Excel.

En la implementación del modelo de Black-Litterman se procede de la siguiente manera:

- Se calcula el vector de ponderaciones en equilibrio ( $w$ ) dado por las ponderaciones del índice COLCAP.
- Se vincula el coeficiente de aversión al riesgo  $\delta$  que es propuesto por el autor (blacklitterman.org, 2014) con un valor de 2,5.

- Se identifica la tasa libre de riesgo ( $R_f$ ) tomada del Banco de la República (banrep, 2018), de corto plazo con vencimiento junio 2018 con valor de 5,4% efectivo anual.
- El valor de  $\tau$  es el estimado por el autor (blacklitterman.org, 2014) cuyo valor es 0,05.
- Se construye la matriz de vistas del experto consultando las perspectivas del analista de renta variable de Casa de Bolsa, Ómar Suárez, consultado por la sección de Economía y Negocios del periódico El Espectador del 13 de junio de 2017 (Espectador, 2017).
- Se calcula la matriz diagonal  $\Omega$ .
- Se obtiene la matriz de correlaciones de los retornos.
- Se calcula el valor esperado del retorno para cada acción una vez aplicada la fórmula maestra del modelo de Black-Litterman.
- Se calcula la matriz de varianzas y covarianza según los retornos estimados.
- Con la información obtenida se construye la frontera eficiente usando el complemento solver de Excel.

En los modelos ARCH y GARCH se estima la volatilidad de los retornos, basándose en la metodología propuesta por Box y Jenkins en 1976, citado por (Bezares, Madariaga, & Santibáñez, 2004), que incluye los siguientes pasos:

- Identificación: elección de diferentes modelos ARIMA que permitan explicar la serie estacionaria. En la identificación de los modelos ARIMA(p,d,q) se tendrán en cuenta las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial para establecer el orden de los rezagos autorregresivos (p) y de medias móviles(q) que son significativos en la serie, además se realiza la prueba de White para identificar la presencia de heteroscedasticidad.
- Estimación: Ante la presencia de heteroscedasticidad en las series, se estimará la varianza a través de los modelos de heteroscedasticidad

condicional autorregresiva ARCH y sus variantes. Los modelos ARMA-ARCH fueron estimados usando el software EViews 9.

- Diagnóstico: se validan los parámetros y se selecciona el modelo que mejor ajuste la serie a partir del valor más bajo según el criterio de información de Akaike sobre la serie que según la metodología de Box-Jenkins tiene que ser constante en media y varianza para lo cual se realiza el test de White sobre el cuadrado de los errores de estimación del modelo ARMA para cada serie (Arce & Mahía, 2009).
- Predicción: una vez que el modelo explica el comportamiento de la serie de manera satisfactoria, se procede a la predicción por fuera de muestra sobre la estimación de la varianza y la matriz de varianza covarianza condicional para el año siguiente.
- Identificada la matriz condicional de varianzas y covarianzas se construye la frontera eficiente usando el complemento solver de Excel.

Una vez aplicados los modelos se procede a realizar la comparación entre los niveles de riesgo que proporciona cada uno asociado al valor esperado de los retornos y por otro lado, se simula una inversión de “X” cantidad de dinero distribuido según los porcentajes de participación de los activos en el portafolio para cada modelo acorde con el nivel de riesgo y se compra cuál fue el comportamiento de los retornos reales contra los retornos esperado de los portafolios según el modelo usando los datos del 4/07/2017 hasta el 30/06/2018 .

#### 4. MARCO TEÓRICO

Los portafolios de inversión han integrado diversas áreas del conocimiento como la matemática, estadística, investigación de operaciones, análisis económico, entre otros; con el ánimo de encontrar estrategias que ayuden a maximizar las utilidades y minimizar el riesgo.

Uno de los aportes, más significativos de los últimos tiempos, fue el del economista Harry Markowitz, quién publicó en la revista *Journal of Finance* en el año 1952 un artículo titulado “Portfolio Selection” y posteriormente en el año 1959 publica un libro titulado “*Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments*” donde con más detalle explica su propuesta. En dicha teoría se plantea una estrategia para la conformación de portafolios de inversión basado en modelos de optimización no lineal, el modelo de media – varianza, dado por:

Minimizar  $\sigma^2$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^N \bar{R} x_i = R$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1$$

$$\text{Con } \sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}$$

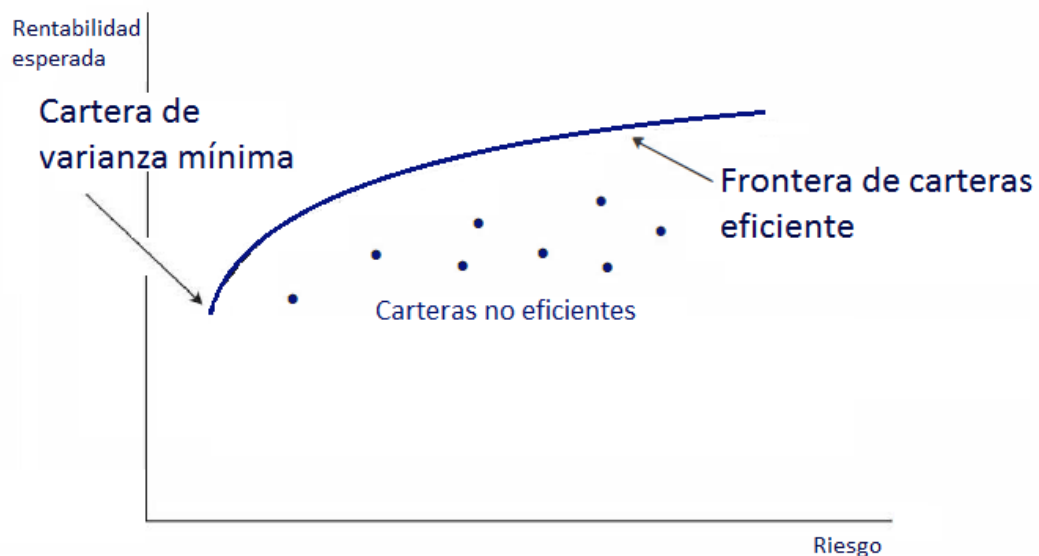
Donde  $\sigma^2$  corresponde con la matriz de varianzas y covarianzas de los retornos de los activos, entendido como el nivel de riesgo del portafolio, cuyo valor se desea minimizar.

$R$  es el retorno esperado del portafolio, que está definido como la suma de los productos entre el valor esperado de cada activo ( $\bar{R}_i$ ) multiplicado por el porcentaje de participación de este dentro del portafolio ( $x_i$ ) indicando el retorno esperado cuando se está expuesto a un nivel de riesgo  $\sigma^2$ .

Una restricción adicional se encuentra en invertir el 100 por ciento del capital haciendo que la suma de los porcentajes de participación ( $x_i$ ) sea uno.

Al resolver este problema de optimización se encuentra la frontera eficiente que está compuesta por las combinaciones de activos dentro de cada portafolio atendiendo a los diferentes niveles de aversión al riesgo desde la cartera de mínima varianza hasta la de máximo riesgo como se visualiza en la figura 1. Tomado de (Economipedia, s.f.)

Figura 1 Frontera eficiente



Fuente: Economipedia

Según Collatti (2002), el modelo de Markowitz, conocido también como método Media–Varianza, se basa en el conocimiento del valor de la media o la esperanza de la rentabilidad para un título o cartera de inversión para un periodo determinado junto con el riesgo que está asociado al valor de la varianza o desviación estándar del mismo, donde el inversor deberá elegir los portafolios de inversión que ofrezcan la mayor rentabilidad esperada bajo el mínimo riesgo o desviación estándar. Propuesta que Markowitz centra en la construcción de la frontera eficiente gracias

a un modelo de optimización que busca la combinación de activos que ofrezca el máximo retorno para un riesgo dado, o en su forma equivalente, el mínimo riesgo para un retorno establecido. Dicho modelo tuvo gran impacto especialmente a nivel teórico, permitiendo el desarrollo de nuevas teorías, sin embargo, la implementación de dichos modelos no tuvo el mismo impacto a nivel práctico dada la complejidad matemática de los mismos, y no fue posible su uso masificado hasta el desarrollo computacional que le hiciera frente al cálculo tedioso en la construcción de los portafolios. Otras falencias que se han identificado dentro del modelo son: por un lado, la conformación de portafolios con pocos activos provocando el efecto contrario sobre la diversificación, y por otro, no se vincula la percepción experta del inversor. De este tipo de falencias han surgido nuevas restricciones al modelo original además del desarrollo de procedimientos alternos como la simulación por el método de Monte Carlo, el modelo de Black-Litterman, el modelo de semi-varianza y los modelos ARCH, entre otros.

A continuación, se presentará una revisión bibliográfica de los procedimientos alternos seleccionados para la comparación de resultados.

#### 4.1 MODELO DE SEMIVARIANZA

En los años setenta surge el método de la semivarianza como solución alternativa al método de la varianza para la administración del riesgo en portafolios de inversión descrita por Markowitz. De acuerdo con lo citado en la publicación *“Análisis Media-semivarianza: Una Aplicación A Las Primas De Riesgo En El Mercado De Valores Español (2007)”*, tomar una medida como la varianza para la medición de la incertidumbre implica que las variaciones positivas y las negativas se toman en consideración para calcular dicha incertidumbre. No obstante, a los inversores les preocupa únicamente la parte negativa del riesgo, es decir, las rentabilidades negativas. Las positivas, lejos de molestar, son deseadas. Sin embargo, si la distribución de rentabilidades es normal, no hay ningún problema al medir el riesgo con la desviación típica o con la varianza, porque la distribución es simétrica, y estos



parámetros, indicarán que tan probable es el observar tanto rentabilidades superiores como inferiores a la media. Pero si la distribución no es simétrica, la desviación típica y la varianza dejan de ser útiles como indicadores de riesgo, ya que la probabilidad de obtener un rendimiento por encima de la media es diferente a la probabilidad de obtenerlo por debajo de ella.

Una metodología, propuesta por (Bawa y Lindenberg 1977), captura las asimetrías considerando el momento parcial negativo. Proponen modificar el análisis media-varianza tradicional por un análisis media-semivarianza. A diferencia de la varianza, la semivarianza no incluye las ganancias en el cálculo del riesgo, solo son incluidas las pérdidas. De esta manera, proponen la modificación del coeficiente beta tradicional por un coeficiente downside beta que mida los co-movimientos de la rentabilidad de un activo con la rentabilidad del mercado cuando su tendencia es bajista. En este sentido cabe resaltar la sugerencia introducida por (Markowitz 1991) en relación con el empleo de medidas alternativas de riesgo dentro del contexto de selección de carteras, haciendo referencia a que la semivarianza resulta una medida más convincente que la varianza para medir el riesgo, ya que tan sólo tiene en cuenta la desviación adversa.

Markowitz defendió a la semivarianza como indicador de riesgo. De hecho, afirmaba que la semivarianza es “el indicador de riesgo más válido” y que “al inversor le preocupa que el rendimiento sea malo, no que sea bueno” por lo que “la semi-desviación es un indicador de riesgo más adecuado que la varianza”.

#### 4.1.1 Coeficiente Beta

Es uno de los indicadores más populares de riesgo, indica cómo varía la rentabilidad del activo financiero si se compra con la evolución del mercado.

Por definición, el mercado tiene una beta equivalente a 1, mientras que las acciones de una empresa mostrarán una beta de acuerdo con su desviación del mercado. Mientras más alto sea la beta, más alto será el riesgo de la inversión. Pero al mismo tiempo existirá un potencial más alto de obtener mayores ganancias. (Sanchez, 2016).

#### Rango de Valores de Coeficiente Beta

Beta negativa: Una beta inferior a cero indica una relación inversa al mercado.

Beta igual a cero: Significa que el activo no tiene riesgo, el valor seguirá siendo el mismo sin importar el movimiento del mercado.

Beta entre 0 y 1: Tienen una volatilidad menor a la del mercado.

Beta igual a 1: Representa la volatilidad de un índice representativo del mercado.

Beta superior a 1: Refleja una volatilidad más alta que la del mercado.

#### Cálculo del Coeficiente Beta

El coeficiente beta es el resultado de dividir la covarianza de un activo y el mercado entre la varianza del mercado.

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}$$

#### 4.1.2 Tasa Libre de Riesgo

Se representa como  $R_f$  y corresponde al rendimiento de un activo sin riesgo, por lo general son Bonos del Tesoro Americano y para el caso colombiano los TES (títulos de deuda pública doméstica, emitidos por el gobierno y administrados por el Banco de la República). Por otro lado, la prima por riesgo ( $R_m - R_f$ ) representa el exceso sobre la tasa libre de riesgo que beneficia al inversionista por asumir mayores riesgos.

#### 4.1.3 Rendimiento de Mercado

Es el rendimiento promedio de las empresas que cotizan en la bolsa de valores.

#### 4.1.4 La Recta del Mercado de Valores (SML)

El riesgo de una cartera se mide en base a la desviación estándar de su rendimiento.

$$SML = E(R_i) = R_f + \beta_i [E(R_m) - R_f]$$

En donde:

$E(R_i)$ : Rendimiento esperado del activo riesgoso

$R_f$ : Tasa de rendimiento esperada sobre un activo libre de riesgo

$E(R_m)$ : Rendimiento esperado sobre la cartera del mercado

$\beta_i$ : Medida del riesgo no diversificable del activo riesgoso

La semivarianza de la rentabilidad es una medida de riesgo más exacta, a los inversores lo que realmente les interesa son las inversiones que están a la baja. Así mismo, la semivarianza es útil cuando la distribución subyacente de la rentabilidad es tanto simétrica como asimétrica y combina información proporcionada por la varianza y la desviación estándar, lo que posibilita el uso de un modelo de un solo factor para calcular la rentabilidad de las inversiones.

El método consiste en tomar un “downside” beta (o beta negativa) que se centra en los movimientos negativos del mercado y sus efectos sobre el activo que se analiza.

En el trabajo realizado por (Miralles Marcelo, Miralles Quirós, & Miralles Quirós , 2007) se analiza si el modelo de valoración de activos Lower Partial Moment-CAPM, que considera la semivarianza de un activo con la cartera de mercado como factor explicativo de la prima de riesgo, representa una mejor aproximación empírica al mercado de valores español. Para ello proponen el contraste de un modelo alternativo al CAPM tradicional denominado LPM-CAPM en el que la varianza ha sido sustituida por la semivarianza y el coeficiente beta tradicional por un coeficiente downside beta. Los resultados obtenidos permiten identificar la persistencia en el mercado bursátil español de un comportamiento diferencial entre las rentabilidades de los activos con mayor y menor nivel de capitalización bursátil. Son los activos de menor tamaño los que presentan a lo largo del periodo de estudio una mayor rentabilidad promedio, un coeficiente de asimetría positivo y un comportamiento del riesgo beta que tiende a moverse de forma directa con el comportamiento del mercado. En cambio, los activos de mayor tamaño en el mercado presentan

asimetría negativa y presentan una relación negativa entre la situación del ciclo económico y el nivel del riesgo beta.

En la investigación realizada por (Uribe, Martínez Damián, & Ramírez Valverde, Método de Semivarianza y varianza para la selección de un portafolio óptimo, 2009) se emplea un estimador para la cosemivarianza de un portafolio compuesto por cuatro activos, planteando como hipótesis que el modelo básico de media-semivarianza aplicado en la elección de un portafolio de inversión selecciona diferentes proporciones. Los resultados muestran la sensibilidad que el método de semivarianza posee al aumentar o disminuir la tasa libre de riesgo, mostrando la proporción que debe disminuir la tasa libre de riesgo para ser desechada como alternativa óptima de inversión.

Por otro lado, en (Manotas Duque, Estrada Bedón , & Uribe Rodríguez, 2011) se muestra de forma detallada la formulación de dos modelos matemáticos teóricos (Media-Gini y Media-Semivarianza) utilizados para la obtención de un portafolio óptimo. El primer modelo involucra en su función objetivo tres índices de valoración: económico, financiero y social, y utiliza el coeficiente de Gini como estimador del riesgo del portafolio, el segundo modelo tiene una función bi-objetivo, que consiste en maximizar el valor presente neto (VPN) del portafolio y la minimización del riesgo de éste, los cuales normalmente se encuentran en conflicto, ya que la optimización de uno usualmente va en detrimento del otro, el estimador del riesgo en el modelo es la semivarianza. Se concluye que los modelos matemáticos aun cuando no toman la decisión, sí se convierten en elementos de relevante importancia para apoyar el proceso de toma de decisiones, debido a que entregan herramientas que permiten ampliar su panorama, con mejores juicios valorativos en procura de tomar la decisión más acertada, en el corto, mediano y largo plazo. Se resalta el hecho de contar actualmente con procesadores tan veloces y paquetes como Opquest, es una ventaja significativa, puesto que se simplifica el trabajo de manera sustancial.

Por otro lado, en (Ariza G. & Cadena L., 2013) se orienta a conformar portafolios basada en la utilización de betas mixtos de las acciones. Se comparan estos resultados frente a portafolios elaborados con base en betas tradicionales (modelo CAPM). La construcción del portafolio se realiza bajo ciertas restricciones de modelación y su selección mediante un proceso de optimización a partir de los betas mixtos. Los resultados obtenidos mediante éstos betas mixtos muestran cómo en gran parte del período de análisis se logran retornos superiores en comparación a los betas tradicionales. En términos financieros, la aplicación de betas mixtos no se restringe a encontrar el nivel de riesgo de un activo o predecir un retorno, estos también pueden usarse para elaborar presupuestos de capital, valorar activos, determinar el costo del capital contable y explicar el riesgo dentro de un contexto de tasas de interés. Concluyendo así que durante gran parte del período analizado la optimización del portafolio utilizando la metodología de betas mixtos supera en el retorno a la opción de betas tradicionales.

Así mismo (Bedoya Hermida, 2016) proyecta como una base de referencia que manifieste la importancia de la diversificación mediante el cálculo de la semivarianza en bolsas con un nivel bajo de volatilidad y negociación, como es el caso ecuatoriano. Plantea el método de versificación con el uso de media-semivarianza y el modelo de valoración de activos D-CAMP, debido a su eficiencia en la aplicación en mercados emergentes frente a los inconvenientes y falta de poder explicativo en los métodos tradicionales de media-varianza y C.A.M.P. concluyendo que el modelo planteado expresa de mejor forma el cálculo del riesgo y su retorno esperado, enfocándose únicamente en los movimientos negativos se obtiene una valoración más precisa de las acciones y a la hora de tomar decisiones es una herramienta fiable.

## 4.2 MODELO DE SIMULACIÓN DE MONTECARLO

Es un algoritmo que se utiliza para aproximar soluciones de un modelo mediante la aplicación repetitiva y aleatoria de este, basado en el mejor ajuste que tienen los datos observados sobre una distribución de probabilidad que permita estimar eventos futuros en aras de la construcción de un modelo de decisión (Pecar, Marina, *“Utilización de simulaciones para evaluar los riesgos agropecuarios”*).

La simulación de Montecarlo consiste entonces en la creación de escenarios mediante la generación de números aleatorios, para luego observar el comportamiento del ambiente simulado. La eficiencia del método de simulación de Montecarlo depende, en gran medida, de la calidad de los números aleatorios generados, es decir, se requiere que posean alto grado de aleatoriedad. Según Lic. Marina Pecar, para llevar a cabo una simulación de un modelo se debe considerar:

- 1) Distribuciones de probabilidad específicas para las variables aleatorias que alimentan el modelo.
- 2) Incluir posibles dependencias entre variables.
- 3) Muestrear valores de las variables aleatorias, para lo cual se puede utilizar el método de Montecarlo.
- 4) Calcular el resultado del modelo según los valores del muestreo (iteración) y registrar el resultado.
- 5) Repetir el proceso hasta tener una muestra estadísticamente representativa.
- 6) Obtener la distribución de frecuencias del resultado de las iteraciones.
- 7) Calcular la media, la desviación estándar y la curva de percentiles acumulados.

Este tipo de análisis resulta útil para evaluar el riesgo de un portafolio, dado que permite estudiar la interdependencia de las variables aleatorias del modelo a través de la estimación de las covarianzas y correlaciones entre las distintas variables, tanto aquellas que alimentan el modelo, como las que constituyen su producto final. En la actualidad es muy común encontrar modelos o sistemas que hacen uso de la simulación Montecarlo en diferentes áreas como la empresarial, informática, económica e incluso social. Este Método suele estar presente en problemas donde hay comportamientos probabilísticos, es decir, bajo riesgo. Es importante saber que el nombre de Montecarlo proviene de la ciudad de Mónaco, famosa debido a la gran

cantidad de casinos de juego, donde la aleatoriedad y el azar están inmersos en la sociedad, siendo un estilo de vida.

Existen varios complementos de Excel diseñados específicamente para la simulación Montecarlo, siendo los más conocidos: @Risk, Crystal Ball, Insight.xla, SimTools.xla, etc., (Faulín, 2005).

En el trabajo realizado por (Ospina Duque & Tangarife Trujillo, 2008) la formulación del problema consiste en determinar cómo se mide el valor en riesgo de un portafolio de acciones en el mercado colombiano y cómo se calcula el riesgo de un portafolio de acciones por los métodos Simulación Histórica, Simulación de Montecarlo y Varianza y Covarianza. Se concluye que la elección del método depende ampliamente de la composición del portafolio y que las herramientas utilizadas para la evaluación de los portafolios de acciones se diferencian en que mientras el Solver considera que las variables siguen una distribución normal (método estático), el Crystall Ball permite tener en cuenta la volatilidad de éstas al incluir en su análisis las diferentes formas de distribución, generando simulaciones estocásticas. Se considera el método Montecarlo como la mejor opción para cuantificar el VaR entre los tres métodos desarrollados, debido a que es el más exacto pues posee el enfoque más completo si la modelación se desarrolla correctamente.

Por su parte (Cruz T., Restrepo C., & Medina V., 2008) utiliza una metodología para realizar inversiones óptimas en instrumentos de renta variable como las acciones utilizando el procedimiento de Markowitz con un enfoque estocástico, desarrollando los cálculos en hoja electrónica Excel, apoyándose en los complementos de Crystal Ball para la simulación Montecarlo y Optquest para la optimización mediante la meta heurística de Branch and bound. Se concluye que el modelo planteado es consistente en el sentido de excluir en muchos de los portafolios a aquellas acciones que presentaban mayor riesgo y menor rentabilidad. El portafolio seleccionado presentó una posibilidad de pérdida relativamente bajo de 23%, pero con alta volatilidad. Se recomienda evitar un portafolio que se concentre en un solo título, es necesario diversificar, para disminuir el riesgo.

En la investigación realizada por (Domínguez Mondragón, 2015) se compara el Modelo de Markowitz con el Método de Simulación de Montecarlo, para saber cuál tiene mayor precisión en los resultados de la construcción de modelos para Portafolios de Inversión con acciones del IPC que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores. Al realizar el comparativo se evidenció que en el modelo de Markowitz se encuentra un mayor rendimiento sin embargo el modelo de Montecarlo por usar distribuciones de probabilidad muestra escenarios que se asemejan más a la realidad. Se afirma que la decisión dependerá del perfil del inversor, si este es conservador se recomienda utilizar el método de Simulación Montecarlo, que a pesar de que se obtiene un menor rendimiento y relativamente el mismo riesgo que en el modelo de Markowitz, se tiene la certeza de que se llegará a este resultado, lo que a diferencia del modelo de Markowitz, permite tener menor incertidumbre en un futuro. Siendo esta la principal ventaja del Modelo de Simulación Montecarlo.

Por otro lado (Sánchez García, 2015) muestra un panorama sobre una opción de inversión, una manera de obtener rendimientos basado en la teoría de Portafolios de Inversión (Modelo de Markowitz). En el modelo aplicado con Montecarlo, el rendimiento esperado del portafolio fue de 8% asociado a un riesgo de 7.3%. Se deduce que la cartera con máxima rentabilidad actualizada no tiene porqué ser la que tenga un nivel mínimo de riesgo. Es decir que el inversor puede incrementar su rentabilidad esperada asumiendo una diferencia extra de riesgo.

Se afirma que, en el caso de no disponer de información en el mercado, resulta eficiente para integrar un portafolio de inversión, el análisis de dicho método.

En el trabajo de grado (Calderón Campos, 2016) se pretende validar la eficiencia del modelo de Markowitz al incorporar medidas de riesgo como el VaR y el Cvar. Se analizó los resultados en distintos mercados para lo cual se tomó una muestra de varios portafolios en los principales mercados financieros y particularmente en Colombia, cada uno con tres títulos. Se seleccionaron activos de sectores económicos diferentes. Adicionalmente se tuvo en cuenta que los activos fueran parte del índice bursátil más representativo de cada mercado.



Se parametrizaron las tareas a través de Matlab de forma estándar para posterior aplicación a los portafolios seleccionados. Validando los resultados obtenidos del método paramétrico con valor en riesgo por el método Montecarlo, se verifican las estimaciones del valor en riesgo. Los resultados se validaron gráficamente a través de histogramas.

#### 4.3 MODELO DE BLACK-LITTERMAN

El modelo propuesto por Markowitz tomó gran importancia en la teoría moderna de las finanzas, permitiendo crear portafolios de inversión bajo una perspectiva racional minimizando los riesgos y maximizando los retornos, pero a pesar de su amplia aceptación, especialmente en el mundo académico, su aplicación en el mundo real se ha visto limitada, según Michaud (1989), citado por (Luis Franco Arbeláez, 2011) la estimación de los parámetros a partir de los datos históricos producen sesgos considerables creando portafolios con pocos activos, violando unos de los objetivos en la minimización del riesgo, la diversificación, por otro lado, el modelo de Markowitz asume que el mercado tiende a mantenerse como lo hizo en el pasado, aspecto que no siempre se cumple.

Atendiendo a estos inconvenientes, Fischer Black y Robert Litterman (1992) incluyen en el modelo de Markowitz dos aspectos fundamentales: la percepción que tiene el inversor sobre el comportamiento de los activos y por otro lado se estima el retorno esperado de los activos a partir del valor del mercado cuando este se encuentra en equilibrio, es decir, cuando la oferta y la demanda son iguales, a través del CAPM (Capital Asset Pricing Model), (Andrés Ramírez Hassan, 2012), esta nueva información se vincula al modelo usando el teorema de Bayes de tal forma que se hace una estimación del retorno esperado dada la información muestral así: (Segura, 2009)

$$P(E[R]/muestra) = \frac{P(muestra/E[R]) * P(E[R])}{P(muestra)}$$

Donde  $P(E[R])$  es la opinión subjetiva sobre el retorno esperado.

Componentes del modelo de Black Litterman (BL). Trujillo S. (2009)

- El vector de ponderaciones  $w = \{w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_N\}$  para  $N$  activos dentro del portafolio de mercado, donde la ponderación del activo  $i$  está dada por:

$$w_i = \frac{M_i}{\sum_1^N M_i}$$

Donde  $M_i$  es igual al número de unidades de un activo disponible en el mercado multiplicado por su respectivo precio que recibe el nombre de capitalización de mercado.

- El vector de los retornos en exceso de los activos  $R = \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$ , que corresponde al retorno de cada activo menos la respectiva tasa libre de riesgo entendiendo la tasa libre de riesgo como una alternativa de inversión que no tiene riesgo para el inversionista. Estos retornos en exceso se distribuyen normalmente con retorno esperado  $\mu$  y matriz de covarianza  $\Sigma$ .

$$\tilde{R} \sim N(\mu, \Sigma)$$

- El vector de retornos de equilibrio  $\pi$  obtenido del procedimiento CAPM para determinar los retornos esperados en consenso por el mercado.

$$\Pi = \delta \Sigma w$$

Donde  $\delta$  corresponde al coeficiente de aversión al riesgo y que puede ser calculado como:

$$\delta = \frac{R_M - R_f}{\sigma_M^2}$$

Con

$R_M$  el retorno del mercado

$R_f$  la tasa libre de riesgo

$\sigma_M^2$  la varianza del retorno del mercado dada por:  $\sigma_M^2 = w' \Sigma w$

Los retornos esperados según la ecuación canónica del modelo Black Litterman (blacklitterman.org, 2014) está dada por:

$$\mu_{BL} = \pi + \tau \Sigma P' (\Omega + \tau P \Sigma P')^{-1} (Q - P \pi)$$

Donde

$$\tau = \frac{1}{T}, \quad \text{con } T \text{ el tamaño de la muestra de retornos}$$

P es la matriz que selecciona los activos que hacen parte de una opinión

Q es el vector de las opiniones

$\Omega$  matriz de covarianzas del error  $\Omega = \text{diagonal}(P(\tau \Sigma)P')$

La varianza posterior de la media estimada sobre la media desconocida:

$$M = \tau \Sigma - \tau \Sigma P' [P \tau \Sigma P' + \Omega]^{-1} P \tau \Sigma$$

Finalmente tenemos la matriz de varianza covarianza para el modelo

$$\Sigma_p = \Sigma + M$$

En la construcción de portafolios de inversión bajo el modelo de Black-Litterman (Salazar & Clement, 2014) hacen un análisis sobre la conformación de portafolios internacionales donde los inversores tienen mayor control sobre el nivel de participación dentro de la cartera de acuerdo con sus expectativas, haciendo que este modelo sea más robusto comparado con el propuesto por Markowitz.

En el trabajo realizado por (Ramírez & Jaramillo, 2015) bajo la metodología propuesta por Black-Litterman en la conformación de portafolios de renta variable colombiano se realizó una comparación entre el rendimiento de este con el desempeño que tuvo el COLCAP entre enero 2009 hasta junio de 2015, tomando periodos trimestrales. Los puntos de vista sobre el posible desempeño de los activos del portafolio fueron asignados a partir del consenso de los analistas financieros de Bloomberg y la tasa libre de riesgo fue tomada del índice interbancario (IBR). Finalmente se evidenció que el modelo de Black Litterman supera en 73,08% de los trimestres al comportamiento del COLCAP.

Por otro lado (Luis Franco Arbeláez, 2011) hacen un análisis sobre algunos inconvenientes que tiene el modelo propuesto por Markowitz, y presenta como alternativa el modelo de Black Litterman en la neutralización de algunos de los inconvenientes permitiendo incrementar el valor esperado del retorno del portafolio gracias a la estimación de los mismos a partir del portafolio que establece el equilibrio del mercado y de las expectativas que tiene el experto inversor.

De la misma manera, (Cárdenas, y otros, 2015) hacen una revisión teórica del modelo de Black Litterman, posteriormente crean un portafolio de inversión con los activos que hacen parte del COLCAP entre 2 de enero de 2013 hasta el 30 agosto de 2013 donde se incluye la percepción sobre algunos de los activos en particular PFGRUPSURA, PFCOLOMB, GRUPOARGOS, PREC, CEMARGOS, BOGOTA, ISAGEN Y PFAVAL. Finalmente concluyen que el modelo de Black Litterman genera portafolios con resultados más consistentes gracias a las expectativas de los inversionistas.

En la investigación realizada por (Silva, Pinheiro, & Poggi, 2017) proponen una nueva forma de crear las vistas utilizando “Verbal Decision Analysis” en el modelo propuesto por Black Litterman, que consiste en unos cuestionarios que facilitan a los inversores exponer sus perspectivas sobre las acciones atendiendo a lo confuso que puede llegar a ser. Dicho modelo fue implementado en acciones brasileñas encontrando carteras balanceadas riesgo – retorno personal sin la ayuda de un experto, contrarrestando el impacto de una vista pobre.

#### 4.4 MODELOS ARCH Y GARCH PARA ESTIMAR LA VOLATILIDAD DEL MODELO DE MARKOWITZ

Atendiendo a uno de los inconvenientes que los investigadores han encontrado en el modelo de Markowitz al suponer homogeneidad en la varianza, se incluyen los

modelos autoerregresivos con heterocedasticidad condicional (ARCH) al modelo original donde la varianza condicionada a la información pasada no permanece constante si no que depende de las perturbaciones que tuvieron lugar, Gálvez y otros (2010). Dicho modelo fue propuesto por Engle (1982). Bollerslev (1986) generaliza los modelos ARCH en modelos GARCH donde se tienen en cuenta también las varianzas condicionales de periodos anteriores. Nelson (1991) propone los modelos EGARCH donde se incluye otro aspecto que afecta la volatilidad, el comportamiento asimétrico frente a las alzas y bajas en los precios de un activo.

La volatilidad es un aspecto que se encuentra implícito en las series de tiempo financieras, entendiendo la volatilidad como la dispersión a partir del valor esperado de un activo o cartera, es decir, el riesgo de una inversión, como lo define Alfonso de Lara Haro: “la desviación estándar de los rendimientos de un activo o un portafolio. Es un indicador fundamental para la cuantificación de riesgos de mercado porque representa una medida de dispersión de los rendimientos con respecto al promedio en un periodo determinado” (Haro, 2008). En términos generales, los rendimientos de los activos o carteras financieras presentan volatilidad no constante en el tiempo, es decir, que la varianza o volatilidad tiende a agruparse en periodos de alta y baja volatilidad o “agrupamiento de volatilidad” (Engle, 2001), y por ende los modelos clásicos de series de tiempo no son aplicables en este contexto, teniendo en cuenta, que se no se cumple el supuesto de homoscedasticidad. Engle propone los modelos ARCH, modelos de heteroscedasticidad condicional autorregresiva (Engle 1982), donde la volatilidad de una serie se expresa en función de las innovaciones pasadas al cuadrado y de media constante, generando modelos altamente explicativos para un futuro cercano pronosticable. Algunas de las características que justifican los modelos ARCH son: (Bahi, 2007)

- Distribuciones leptocúrticas, valores superiores a tres.
- Generalmente simétricas o con coeficientes cercanos a cero.
- Agrupamiento de volatilidad.
- Persistencia en la volatilidad.

- Efecto asimétrico de la volatilidad ante noticias positivas y negativas.
- Baja correlación en las series de los rendimientos.
- Correlación de los cuadrados de los rendimientos de la serie.

Según (Engle, 1982), y tomando el caso más sencillo un proceso ARCH(1) viene dado por:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2$$

Donde  $\varepsilon_t$  es un proceso de ruido blanco formado por variables aleatorias normales independientes de media cero y varianza uno, y  $\sigma_t$  es un factor denominado volatilidad,  $\omega > 0$  corresponde a la mínima varianza condicional observada y  $\alpha$  es un valor para estimar correspondiente al peso o importancia de la innovación un rezago atrás ( $y_{t-1}^2$ ), con la condición  $0 \leq \alpha \leq 1$  (condición necesaria y suficiente para garantizar la existencia de la varianza condicional e incondicional o de largo plazo).

Un modelo ARCH(p) viene dado por:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2$$

Con las siguientes restricciones:

1.  $\varepsilon_t$  es un proceso de ruido blanco o serie estocástica con media cero y varianza uno.
2.  $\omega > 0$  corresponde a la mínima varianza condicional observada.
3. Los parámetros a estimar  $\alpha_i \geq 0$ , con  $i = 1, 2, \dots, p$ , siendo  $p$  el número de rezagos significativos en la serie.

4.  $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$  para garantizar la estacionalidad de la varianza.
5. Si  $\varepsilon_t$  es gaussiano,  $y_t$  es condicionalmente normal y su varianza es  $\sigma_t^2$ .

Aunque los modelos ARCH proveen una mejor estimación de la volatilidad en series heteroscedasticas, el número de rezagos necesarios para lograr capturar la volatilidad en múltiples ocasiones es demasiado elevado (Peters, 2001). Ante la necesidad de mejorar los modelos predictivos, (Bollerslev, 1986) propone los modelos de heteroscedasticidad condicional autorregresiva generalizados GARCH por sus siglas en inglés, donde además de vincular las innovaciones pasadas, también se incorporan a los modelos las varianzas de los rezagos.

Sobre un modelo GARCH(p,q) se tiene que:

$$y_t = \varepsilon_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Con  $\omega > 0$ , y  $\alpha_i \geq 0$ , con  $i = 1, 2, \dots, p$  y  $\beta_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, q$ .

Al igual que en los modelos ARCH, la varianza condicional es estacionaria si se cumple que  $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$  y el valor de la varianza incondicional o a largo plazo es constante (Jorge Argáez Sosa, 2014) con valor:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j}$$

A pesar de que los modelos Arch y Garch tuvieron buenos resultados en la estimación de la volatilidad, dichos modelos asumen simetría respecto a los impactos positivos o negativos de la serie, pero es común en series financieras que los impactos sean diferentes según sea la innovación al alza o a la baja. Con el fin de subsanar dichos inconvenientes, Daniel Nelson (Nelson, 1991) propone el modelo Garch exponencial o EGARCH que tiene en cuenta el comportamiento

asimétrico de las series, para tal fin genera una función  $g$  de las innovaciones  $Z_t$ , que corresponde a variables independiente e idénticamente distribuidas con media cero, que vincula el valor de la innovación  $Z_t$  y también su magnitud a través de:

$$g(Z_t) = \theta Z_t + \lambda[|Z_t| - E(|Z_t|)]$$

donde  $\theta$  y  $\lambda$  son números reales. Otra manera de expresar la función  $g(Z_t)$  es:

$$g(Z_t) = \begin{cases} (\theta + \lambda)Z_t - \lambda E(|Z_t|) & \text{si } Z_t \geq 0 \\ (\theta - \lambda)Z_t - \lambda E(|Z_t|) & \text{si } Z_t < 0 \end{cases}$$

Por otra parte, en portafolios de inversión con varios activos es necesario, en múltiples ocasiones, vincular la matriz de varianzas y covarianzas cuando las series presentan correlaciones diferentes de cero en aras de la optimización de los estimadores (Zárate, 2015).

La matriz de varianzas y covarianzas bajo un modelo GARCH multivariado está dado según Bollerslev (1988) citado por (Ruiz, 1994):

$$y_t = \epsilon_t \Omega_t^{1/2}$$

$$vech(\Omega_t) = W + \sum_{i=1}^q A_i vech(y_{t-i} y'_{t-i}) + \sum_{j=1}^p B_j vech(\Omega_{t-j})$$

Donde  $y_t$  es un vector de tamaño  $N \times 1$ ,  $\epsilon_t$  está normal e idénticamente distribuido con media cero y varianza uno,  $W$  es un vector de tamaño  $N(N+1)/2$ ,  $A_i$  y  $B_i$  son matrices de tamaño  $N(N+1)/2 \times N(N+1)/2$  y  $vech(.)$  transforma la parte inferior de una matriz  $N \times N$  en un vector de tamaño  $N(N+1)/2$ . A pesar de que el modelo multivariado propuesto por Bollerslev está pensado en la obtención de una mejor estimación de la varianza conjunta, presenta serios inconvenientes a la hora de estimar los parámetros dado que estos aumentan de forma exponencial al aumentar la cantidad de activos en el portafolio, además que la matriz de varianza y covarianza no garantiza ser definida positiva (López, 2009). Algunos de las modificaciones que derivaron en modelos más simples están:



#### 4.4.1 El modelo VECH Diagonal

$$\Sigma_t = W + \sum_{i=1}^q A_i \odot (y_{t-i} y'_{t-i}) + \sum_{j=1}^p B_j \odot (\Omega_{t-j})$$

Donde  $\odot$  representa el producto elemento a elemento, A y B son matrices simétricas.

#### 4.4.2 El modelo BEKK

Desarrollado por “Baba, Engle, Kraft y Kroner” (BEKK), reduce la cantidad de parámetros a ser estimados, además de garantizar que la matriz de varianza y covarianza sea definida positiva.

$$\Sigma_t = C' C + \sum_{i=1}^q A_i (\epsilon_{t-i} \epsilon'_{t-i}) A'_i + \sum_{j=1}^p B_j (H_{t-j}) B'_j$$

Siendo C una matriz de constantes, donde cada  $c_{i,j} = 0$  si  $i < j$ , A y B son matrices cuadradas de dimensión k, que incluye los efectos cruzados respecto a la volatilidad del mercado en las posiciones  $a_{i,j}$ , y  $b_{i,j}$  con  $i \neq j$ , y k está dado por la cantidad de variables.

#### 4.4.3 Modelo BEKK diagonal

El modelo BEKK diagonal es un modelo ajustado del modelo BEKK, donde A y B son matrices diagonales que ignoran las interacciones entre las volatilidades.

#### 4.4.4 Modelo condicional de correlación constante

Bollerslev (1990) citado por (Arody Ortiz Alvarado, 2015) propone un modelo donde se asume que la matriz de correlaciones es invariante y también que las varianzas condicionales provienen de un modelo GARCH univariado.

$$H_t = D_t R D_t = (\rho_{ij} \sqrt{h_{iit} h_{jtt}})$$

Donde:

$$D_t = \text{diag}(h_{iit}^{\frac{1}{2}} \dots h_{Nnt}^{\frac{1}{2}})$$

$h_{iit}$  puede ser definido con un modelo GARCH univariado,  $R = (\rho_{ij})$  es una matriz definida positiva simétrica,  $\rho_{ij} = 1$  para todo  $i$ .  $R$  es la matriz con las correlaciones condicionales constantes  $\rho_{ij}$ .

Con respecto a la estimación de la volatilidad a través de modelos ARCH-GARCH, Casas y Cepeda (Monsegny & Cuervo, 2008) hacen una descripción de los modelos Arch, Garch y Egarch y realizan un análisis sobre el precio y los retornos de las acciones de Gillette entre el 4 de enero de 1999 y mayo 13 de 2003, encontrando que el mejor modelo que se ajusta según los criterios de información AIC y BIC para el precio es el GARCH(1,1) y el EGARCH(2,1) para la serie de los retornos.

En el trabajo realizado por (Camargo, Fontanilla, & Luna, 2012) cuyo objetivo es determinar el modelo que mejor explique el comportamiento histórico del índice general de la bolsa de valores de Colombia (IGBC) entre 1 de enero de 2008 y 31 mayo de 2012 a través de una comparación entre los modelos Arch, Garch, Egarch y Parch, concluyendo que el modelo EGARCH(1,1) es el que tuvo mejor desempeño predictivo.

De la misma manera (Ramírez & Castaño, 2006) hacen una revisión de los modelos Arch que son aplicados a la serie de rendimientos del índice general de la bolsa de

valores de Colombia entre 2 de enero 2004 hasta el 9 febrero de 2006, encontrando que el mejor modelo que explica la rentabilidad esperada de la serie de rendimientos es el  $Ar(1)$ , y a partir de dicho modelo se hace la estimación de la volatilidad encontrando que el modelo  $Arch(2)$  tuvo mejor desempeño.

Por su parte (Urzúa, 2012) hacen un análisis en la construcción de portafolios de inversión con acciones del mercado chileno a través del método de media-varianza desarrollado por Markowitz donde la estimación de la volatilidad se hace a través de la matriz de varianza condicional usando modelos Garch. Se hace un análisis comparativo entre los resultados de los modelos Garch y el portafolio de mercado dado por el índice general de precio de acciones de la bolsa de Comercio de Chile, concluyendo que los modelos propuestos proporcionan algún grado de protección ante el riesgo, disminuyendo la probabilidad de presentar pérdidas superiores a las del mercado, además los retornos promedio de las carteras estimadas con varianzas condicionales tuvieron en términos generales mejor desempeño que los retornos provenientes de la matriz de varianza no condicional.

El pronóstico de la volatilidad a través de modelos Garch de la acción Atacocha cotizada en la bolsa de valores de Lima realizado por (Rojas' & Palacios, 2004) se realizó sobre un modelo  $ARMA(0,2) - GARCH(2,2)$  para el periodo fuera de muestra entre 10/2003 hasta 11/2003, evidenciando el adecuado uso de dichos modelos ante la presencia de heteroscedasticidad de los retornos.

Por otro lado, (Vargas & Martínez, 2006) hacen una breve discusión sobre los modelos Garch y como estos han subsanado inconvenientes tales como la dependencia de segundo orden y distribuciones de colas pesadas, típico de la distribución de los retornos financieros, sin embargo, concluyen que dichos modelos también enfrentan problemas tales como la leptocurtosis además de la especificación y estimación parsimoniosa de los parámetros.

En el trabajo realizado por (Vazquez, Valdes, & Porras, 2013) plantean un modelo Garch con asimetría condicional autorregresiva como información adicional a la media y varianza en la descripción de series de tiempo, modelaron los rendimientos diarios del índice de precios y cotizaciones (IPC) de México entre 3 de enero de 2008 y 29 de septiembre de 2009 encontrando que empíricamente el modelo refleja de manera acertada el comportamiento de los rendimientos del IPC a pesar de su comportamiento atípico del momento.

Así mismo (Correa, Pérez, & Martínez, 2014) hacen la presentación de diferentes modelos para la estimación de la volatilidad de los rendimientos diarios de índices bursátiles, entre ellos los modelos arch y algunas de sus modificaciones. Posteriormente hacen la estimación de los parámetros con los diferentes modelos usando para tal fin los índices bursátiles: S&P 500 de EEUU, índice de precios y cotizaciones de México (IPC) y el índice general de la bolsa de valores de Colombia (IGBC), encontrando que los modelos Arch que mejor ajustan la volatilidad de las series son: Egarch(2,1) para S&P 500, Egarch(1,1) para el IPC y Garch(1,1) para IGBC.

A manera de resumen, se presenta la siguiente información:

*Tabla 1 Ventajas y desventajas de los Modelos*

MODELO	VENTAJAS	DESVENTAJAS
Semivarianza	Resulta ser una medida más convincente que la varianza para medir el riesgo ya que tan sólo tiene en cuenta la desviación adversa, es decir, no incluye las ganancias en el cálculo del riesgo, solo las pérdidas se incluyen.	Sensible al aumento o disminución de la tasa libre de riesgo.
Montecarlo	Hace frente al cálculo tedioso en la construcción de los portafolios	Debido a la aleatoriedad del método no necesariamente un

	gracias al desarrollo computacional.	incremento en el riesgo implica un aumento en el rendimiento esperado.
Black - Litterman	Permite integrar la percepción del experto inversor respecto al comportamiento que van a tener los activos sobre el modelo de optimización, obteniendo como resultado modelos más robustos que ofrecen mejores resultados. Calcula el valor esperado de los retornos cuando este se encuentra en equilibrio, es decir, cuando la oferta iguala a la demanda.	Los resultados obtenidos por este modelo se verán seriamente afectados cuando se tiene una pobre visión sobre el comportamiento de los activos.
Arch y Garch	Modela la volatilidad de las series que presentan heteroscedasticidad, integrando las innovaciones de la serie como la distribución de los errores al cuadrado, permitiendo una vista más ajustada con la realidad.	El costo computacional en la obtención de los parámetros del modelo.

## 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación, se tiene la estadística descriptiva de los datos correspondientes al valor de las acciones del grupo de datos sobre los cuales se construyeron los modelos.

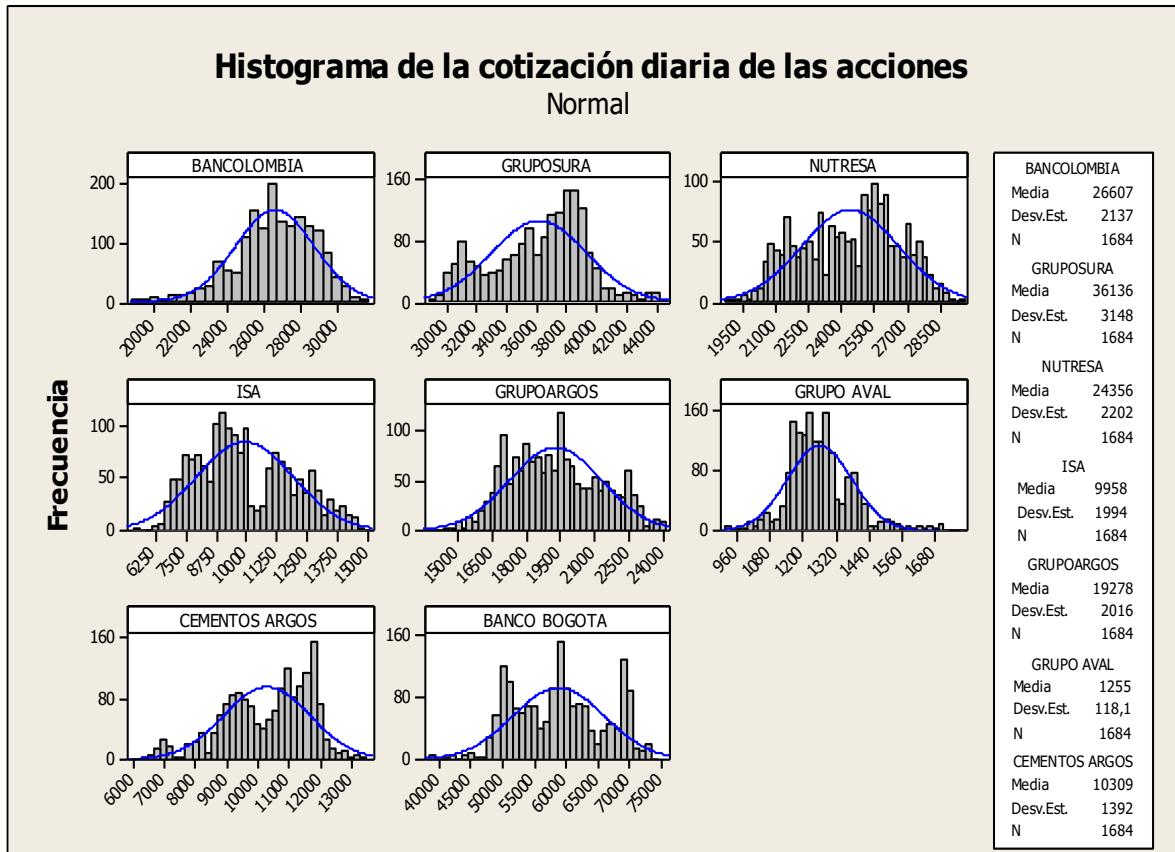
*Tabla 2 Estadística descriptiva de las acciones*

Estadística	BANCOLOMBIA	GRUPOSURA	NUTRESA	ISA	GRUPOARGOS	GRUPO AVAL	CEMENTOS ARGOS	BANCO BOGOTA
Media	26606,71021	36135,51069	24355,57007	9958,099762	19277,99287	1255,346793	10308,6734	58780,93824
Desviación estándar	2137,367144	3147,760888	2202,067973	1993,840056	2015,900315	118,0867519	1391,807462	7228,867647
Curtosis	0,412556653	-0,515646869	-0,959686663	-0,780514511	-0,710225444	2,000565714	-0,373562289	-0,779492469
Rango	12680	15200	10700	9560	10300	852	7350	35000
Mínimo	18900	29100	18800	5420	13800	918	6050	38500
Máximo	31580	44300	29500	14980	24100	1770	13400	73500
Cuenta	1684	1684	1684	1684	1684	1684	1684	1684

Se aprecia que la media del precio diario de las acciones presenta diferencias significativas de valor, de modo, que para poder realizar un análisis entre las acciones que no se vea afectado por el valor al cual se cotiza, se hace necesario trabajar con la diferencia de los logaritmos neperianos (retornos). Se ve una distribución normal de la curtosis, y en todas las series existen 1684 datos.

La figura 2 corresponde con los histogramas para cada activo comparado con la distribución normal.

Figura 2 Histograma Cotización diaria de las acciones



Se ve en la figura 2 como la distribución del precio de las acciones presenta periodos de alta volatilidad seguidos de otros de relativa calma, indicativo de la presencia de heteroscedasticidad en la serie de datos, hecho que se confirmará más adelante. También se aprecia una distribución no normal en todos los activos.

Como se indicaba con anterioridad, es necesario trabajar con los retornos de los activos, en la tabla 3 se encuentra algunas estadísticas descriptivas de dichos retornos.

Tabla 3 Estadística descriptiva de las series

Estadística	GRUPOSURA	NUTRESA	ISA	GRUPOARGOS	GRUPO AVAL	CEMENTOS ARGOS	BANCO BOGOTA
Media	0,000168134	0,000146823	3,37536E-05	5,26793E-05	0,000184502	2,6686E-05	0,000290273
Varianza de la muestra	0,000372545	0,000259122	0,000288905	0,000272724	0,000269614	0,000658249	0,000296985
Curtosis	175,3855344	180,7741523	13,68203999	6,197524785	35,09982883	200,3149805	237,683672
Prueba de Normalidad	$1,003 \cdot 10^{-50}$	$1,06 \cdot 10^{-50}$	$2,61 \cdot 10^{-31}$	$1,24 \cdot 10^{-25}$	$7,10 \cdot 10^{-41}$	$3,29 \cdot 10^{-55}$	$2,93 \cdot 10^{-54}$

En la tabla 3 se tiene la estadística descriptiva de los retornos diarios. La media que se usa como valor estimado de los retornos en algunos de los modelos, la varianza que se incluye en la matriz de varianzas y covarianzas y que se encuentra asociada con el riesgo, la curtosis que en todas las series presenta valores demasiados altos, indicando la presencia de heteroscedasticidad y la prueba de normalidad de Shapiro Wilk, necesaria para encontrar el mejor ajuste de los datos a una distribución de probabilidad.

La prueba de normalidad corresponde con la siguiente prueba de hipótesis:

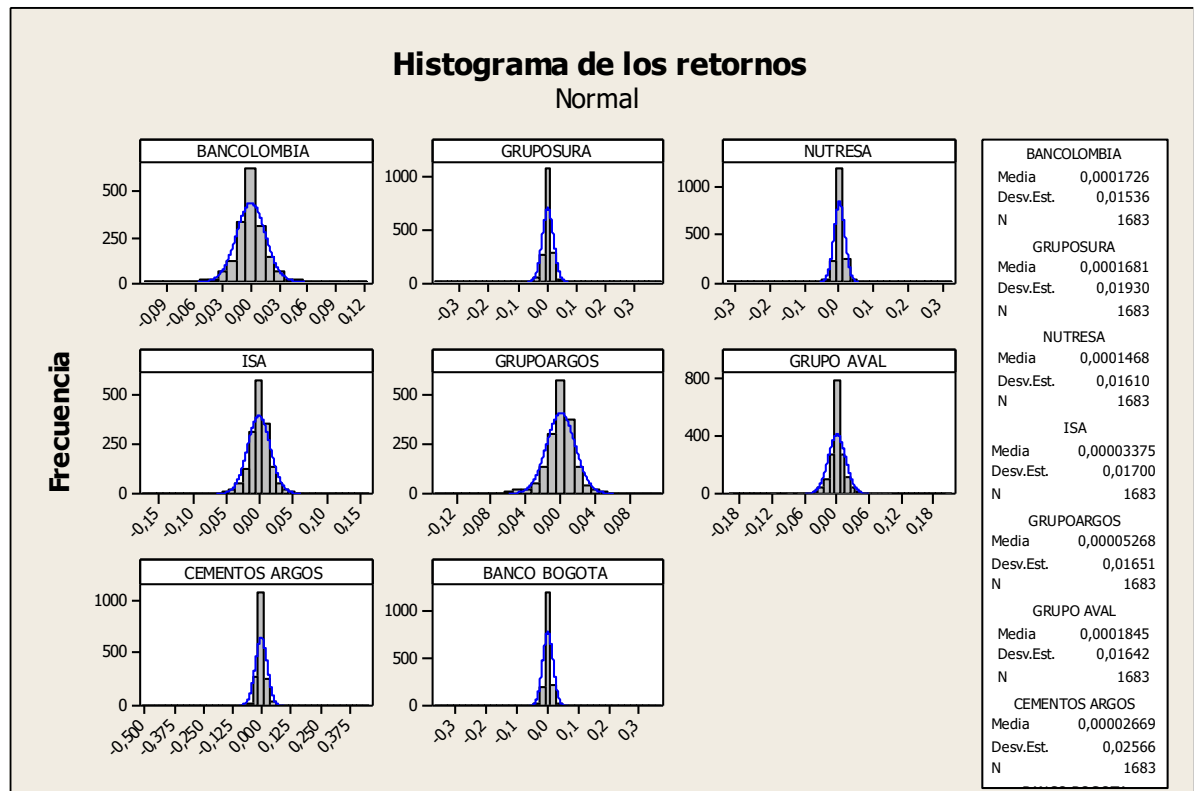
- Hipótesis nula: los datos se ajustan a una distribución normal.
- Hipótesis alterna: los datos no se ajustan a una distribución normal.

La prueba de normalidad fue rechazada por todas las acciones por tener p-valores inferiores al 5% indicando la necesidad de identificar cuál es la distribución de probabilidad que mejor ajusta los datos en la implementación de la simulación por el método de Monte Carlo.

La figura 3 contiene los histogramas de las series de retornos comparados con la distribución normal.



Figura 3 Histograma de series de datos



Se ve en la figura 3 los histogramas para la distribución de los retornos comparado con la distribución normal donde se puede apreciar los picos altos que hacen a estas distribuciones leptocúrticas confirmando la distribución no normal.

Una vez realizada la estadística descriptiva se procede a construir los modelos sobre la serie de los retornos.

### 5.1 Portafolios de inversión siguiendo la metodología de Markowitz

Como punto de partida se calcula la frontera eficiente usando la metodología propuesta por Markowitz, teniendo en cuenta que dicha metodología dio origen a nuevas propuestas es la conformación de portafolios de inversión. Para ello se utiliza el vector de medias históricas de los retornos, tabla 4 y la matriz de varianza covarianza no condicional de los retornos, tabla 5.

Tabla 4 Vector de medias sobre los retornos

<u>Acción</u>	<u>MEDIA</u>
<u>BANCOLOMBIA</u>	<u>0,000173</u>
<u>GRUPOSURA</u>	<u>0,000168</u>
<u>NUTRESA</u>	<u>0,000147</u>
<u>ISA</u>	<u>0,000034</u>
<u>GRUPOARGOS</u>	<u>0,000053</u>
<u>GRUPO AVAL</u>	<u>0,000185</u>
<u>CEMENTOS</u>	
<u>ARGOS</u>	<u>0,000027</u>
<u>BANCO</u>	
<u>BOGOTA</u>	<u>0,000290</u>

Tabla 5 Matriz de varianza covarianza no condicional

	<u>BANCOLOMBIA</u>	<u>GRUPOSURA</u>	<u>NUTRESA</u>	<u>ISA</u>	<u>GRUPOARGOS</u>	<u>GRUPO AVAL</u>	<u>CEMENTOS ARGOS</u>	<u>BANCO BOGOTA</u>
<u>BANCOLOMBIA</u>	0,000235932	0,000137585	9,39339E-05	3,9691E-05	0,000100335	8,3495E-05	0,000135996	7,82528E-05
<u>GRUPOSURA</u>	0,000137585	0,000372323	0,0002021	1,95746E-05	0,000172216	0,000141737	0,000294779	0,000195275
<u>NUTRESA</u>	9,39339E-05	0,0002021	0,000258968	-4,27398E-07	0,000110113	0,00012359	0,000226762	0,000174939
<u>ISA</u>	3,9691E-05	1,95746E-05	-4,27398E-07	0,000288733	8,49111E-05	3,06293E-06	-7,4822E-06	-4,32624E-05
<u>GRUPOARGOS</u>	0,000100335	0,000172216	0,000110113	8,49111E-05	0,000272562	7,88918E-05	0,000176108	8,48945E-05
<u>GRUPO AVAL</u>	8,3495E-05	0,000141737	0,00012359	3,06293E-06	7,88918E-05	0,000269454	0,000157715	0,00013296
<u>CEMENTOS ARGOS</u>	0,000135996	0,000294779	0,000226762	-7,4822E-06	0,000176108	0,000157715	0,000657858	0,000226262
<u>BANCO BOGOTA</u>	7,82528E-05	0,000195275	0,000174939	-4,32624E-05	8,48945E-05	0,00013296	0,000226262	0,000296809

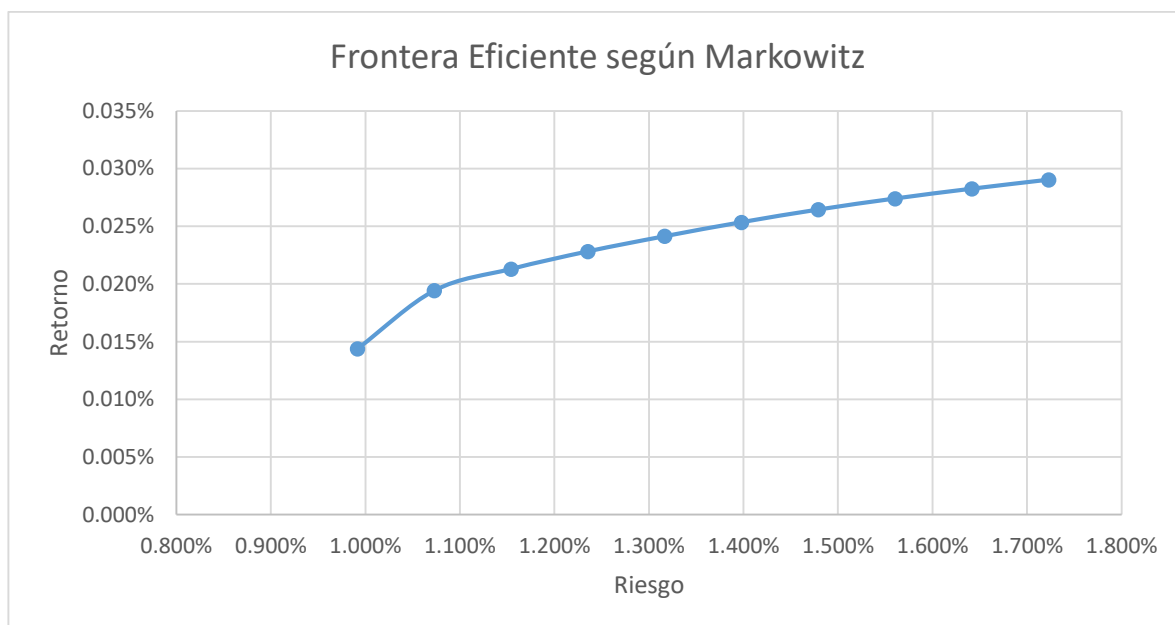
Se procede a calcular la frontera eficiente usando la herramienta solver de Excel, donde se minimiza el riesgo, se maximiza el retorno y se incluye los puntos equidistantes respecto a la desviación estándar para determinar dicha frontera a través de 10 portafolios. En la tabla 6 se encuentra la combinación de activos, junto con el retorno esperado y el riesgo entendido como la desviación estándar para cada portafolio.

Tabla 6 Portafolio según Markowitz

PORTAFOLIO	BANCOLOMBIA	GRUPOSURA	NUTRESA	ISA	GRUPOARGOS	GRUPO AVAL	CEMENTOS	ARGOS	BANCO BOGOTA	RIESGO	RETORNO
Mínima varianza	18,72%	0,00%	8,55%	32,83%	4,96%	15,23%	0,00%		19,70%	0,9917%	0,0144%
2	22,33%	0,00%	0,00%	21,31%	0,00%	14,28%	0,00%		42,08%	1,0729%	0,0194%
3	22,55%	0,00%	0,00%	13,91%	0,00%	14,29%	0,00%		49,25%	1,1542%	0,0213%
4	23,77%	0,00%	0,00%	9,55%	0,00%	9,10%	0,00%		57,57%	1,2354%	0,0228%
5	23,59%	0,00%	0,00%	4,34%	0,00%	9,54%	0,00%		62,54%	1,3166%	0,0241%
6	24,35%	0,00%	0,00%	0,59%	0,00%	6,30%	0,00%		68,75%	1,3979%	0,0253%
7	20,62%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,53%	0,00%		77,85%	1,4791%	0,0264%
8	13,86%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%		86,14%	1,5603%	0,0274%
9	6,63%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%		93,37%	1,6416%	0,0282%
Máximo retorno	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%		100,00%	1,7228%	0,0290%

En la figura 4 se encuentra la frontera eficiente según la metodología propuesta por Markowitz.

Figura 4 Frontera eficiente según Markowitz



En este modelo se tiene las carteras de inversión cuyo riesgo está variando entre 0,9917% para la cartera más conservadora con un retorno de 0,0144% hasta el 1,7228% con un retorno de 0,0290% para el portafolio de mayor riesgo.

## 5.2 Portafolios de inversión siguiendo el modelo de Semivarianza

En la tabla 7 se encuentran los datos requeridos por el modelo.

Tabla 7 Datos para cálculos del modelo Semivarianza

	<b>BANCOLOMBIA</b>	<b>GRUPOSURA</b>	<b>NUTRESA</b>	<b>ISA</b>	<b>GRUPOARGOS</b>	<b>GRUPO AVAL</b>	<b>CEMENTOS ARGOS</b>	<b>BANCO BOGOTA</b>	<b>COLCAP</b>
<b>Promedio</b>	0,000172567	0,000168134	0,000146823	3,37536E-05	5,26793E-05	0,000184502	2,6686E-05	0,000290273	-9,3668E-06
<b>Desv Downside</b>	0,011071094	0,016349747	0,01336447	0,013147198	0,012300977	0,01221207	0,025282524	0,01437454	
<b>Cosemivarianza</b>	1,43271E-05	8,95919E-06	6,38465E-06	9,25164E-06	1,31351E-05	1,073E-05	9,33513E-06	4,57178E-06	
<b>Semivarianza</b>	4,45711E-05								
<b>Downside Beta</b>	0,321442872	0,201009006	0,143246431	0,207570621	0,294700103	0,240738495	0,209443758	0,102572887	
<b>TLR</b>	0,000165574								
<b>D-CAPM</b>	0,000631662	0,000156603	-0,001403057	-0,010026485	-0,00917768	0,001549976	-0,005493429	0,008674996	

Se calcula la matriz de correlaciones entre las acciones. Tabla 8.

Tabla 8 Matriz de Correlaciones Semivarianza

	<b>BANCOLOMBIA</b>	<b>GRUPOSURA</b>	<b>NUTRESA</b>	<b>ISA</b>	<b>GRUPOARGOS</b>	<b>GRUPO AVAL</b>	<b>CEMENTOS ARGOS</b>	<b>BANCO BOGOTA</b>
<b>BANCOLOMBIA</b>	1	0,464212104	0,380019023	0,152072143	0,395665289	0,33114991	0,345197012	0,295711033
<b>GRUPOSURA</b>	0,464212104	1	0,650852664	0,059701488	0,540605873	0,447487699	0,595622483	0,587417852
<b>NUTRESA</b>	0,380019023	0,650852664	1	-0,001563006	0,414459286	0,467862082	0,549390961	0,63099366
<b>ISA</b>	0,152072143	0,059701488	-0,001563006	1	0,302679989	0,010981128	-0,017167826	-0,147782683
<b>GRUPOARGOS</b>	0,395665289	0,540605873	0,414459286	0,302679989	1	0,291110356	0,415893211	0,298475436
<b>GRUPO AVAL</b>	0,33114991	0,447487699	0,467862082	0,010981128	0,291110356	1	0,374596391	0,470155437
<b>CEMENTOS ARGOS</b>	0,345197012	0,595622483	0,549390961	-0,017167826	0,415893211	0,374596391	1	0,512044481
<b>BANCO BOGOTA</b>	0,295711033	0,587417852	0,63099366	-0,147782683	0,298475436	0,470155437	0,512044481	1

La tabla 9 contiene la matriz de Covarianzas. Estos valores son el resultado del producto de los factores: correlación entre las acciones respectivas y los valores de las desviaciones Downside de cada acción.

Tabla 9 Matriz de Covarianzas Semivarianza

	<b>BANCOLOMBIA</b>	<b>GRUPOSURA</b>	<b>NUTRESA</b>	<b>ISA</b>	<b>GRUPOARGOS</b>	<b>GRUPO AVAL</b>	<b>CEMENTOS ARGOS</b>	<b>BANCO BOGOTA</b>
<b>BANCOLOMBIA</b>	0,000122569	8,40268E-05	5,62273E-05	2,21347E-05	5,38838E-05	4,47718E-05	9,66224E-05	4,706E-05
<b>GRUPOSURA</b>	8,40268E-05	0,000267314	0,000142215	1,2833E-05	0,000108725	8,93473E-05	0,000246208	0,000138055
<b>NUTRESA</b>	5,62273E-05	0,000142215	0,000178609	-2,74628E-07	6,81355E-05	7,63588E-05	0,000185632	0,000121219
<b>ISA</b>	2,21347E-05	1,2833E-05	-2,74628E-07	0,000172849	4,89504E-05	1,76307E-06	-5,70649E-06	-2,79287E-05
<b>GRUPOARGOS</b>	5,38838E-05	0,000108725	6,81355E-05	4,89504E-05	0,000151314	4,37307E-05	0,000129343	5,27767E-05
<b>GRUPO AVAL</b>	4,47718E-05	8,93473E-05	7,63588E-05	1,76307E-06	4,37307E-05	0,000149135	0,000115657	8,25324E-05
<b>CEMENTOS ARGOS</b>	9,66224E-05	0,000246208	0,000185632	-5,70649E-06	0,000129343	0,000115657	0,000639206	0,00018609
<b>BANCO BOGOTA</b>	4,706E-05	0,000138055	0,000121219	-2,79287E-05	5,27767E-05	8,25324E-05	0,00018609	0,000206627

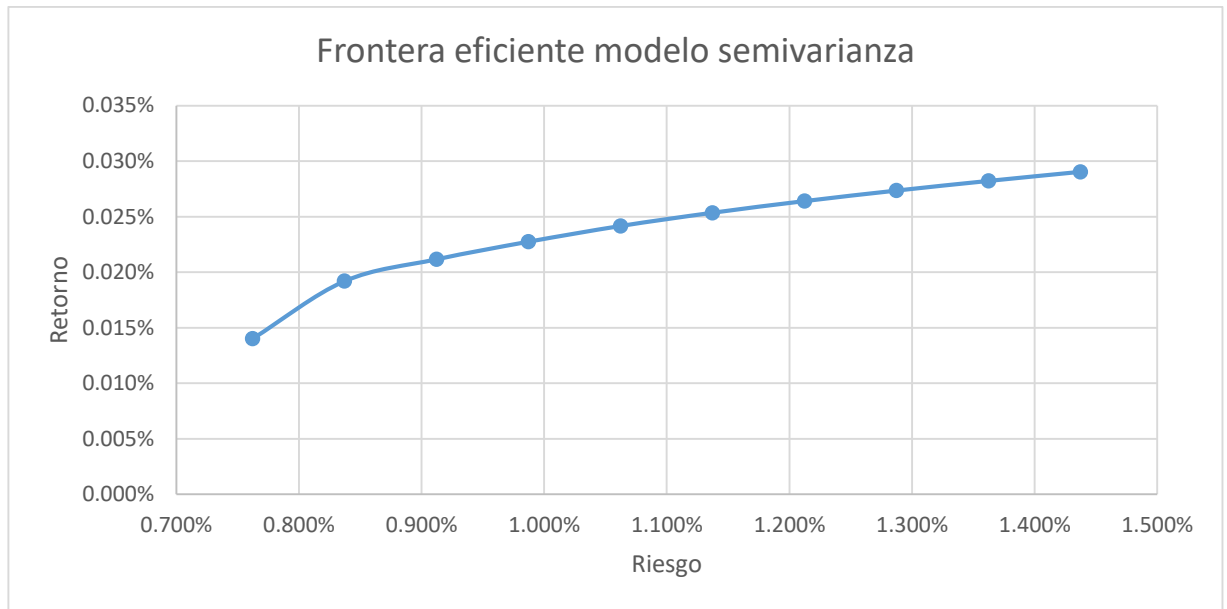
En la tabla 10 se encuentra la conformación de los portafolios bajo esta metodología.

Tabla 10 Portafolio según el modelo de Semivarianza

<b>PORTAFOLIO</b>	<b>BANCOLOMBIA</b>	<b>GRUPOSURA</b>	<b>NUTRESA</b>	<b>ISA</b>	<b>GRUPOARGOS</b>	<b>GRUPO AVAL</b>	<b>CEMENTOS ARGOS</b>	<b>BANCO BOGOTA</b>	<b>RIESGO</b>	<b>RETORNO</b>
Mínima varianza	24,2%	0,0%	3,8%	30,7%	7,4%	18,8%	0,0%	15,1%	0,7621%	0,0140%
2	29,9%	0,0%	0,0%	18,0%	0,0%	16,1%	0,0%	36,0%	0,8372%	0,0192%
3	30,7%	0,0%	0,0%	9,7%	0,0%	16,6%	0,0%	43,0%	0,9122%	0,0212%
4	31,0%	0,0%	0,0%	3,6%	0,0%	16,2%	0,0%	49,2%	0,9872%	0,0227%
5	31,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	11,0%	0,0%	57,5%	1,0623%	0,0242%
6	26,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	5,3%	0,0%	68,2%	1,1373%	0,0253%
7	21,9%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,5%	0,0%	77,6%	1,2123%	0,0264%
8	14,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	85,7%	1,2874%	0,0273%
9	6,9%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	93,1%	1,3624%	0,0282%
Máximo retorno	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%	1,4375%	0,0290%

La figura 5 muestra la frontera eficiente para los portafolios de inversión siguiendo el modelo de Semivarianza.

Figura 5 Frontera eficiente según el modelo de Semivarianza



Los portafolios de inversión a través del modelo de Semivarianza tienen un riesgo entre 0,7621% con un retorno de 0,0140% hasta 1,4375% con un retorno de 0,0290%.

### 5.3 Portafolios de inversión siguiendo la simulación por Montecarlo

Dado que los retornos no presentan distribución normal, se hace el ajuste para identificar a cuál distribución se ajustan los retornos de las acciones, en la tabla 11 se encuentra el valor estimado para la media según la distribución de probabilidad, encontrando que todas las acciones se ajustan a una distribución de probabilidad t de Student, excepto para las acciones del grupo Aval que la ajusta una distribución logística.

Tabla 11 Ajuste de datos Montecarlo

Serie de datos:	BANCOLOMBIA	GRUPOSURA	NUTRESA	ISA	GRUPOARGOS	GRUPO AVAL	CEMENTOS ARGOS	BANCO BOGOTA
Distribución:	0.000074945	0.00007302	0.000063764	0.000014659	0.000022878	0.000045382	0.00001159	0.000126064
Mejor ajuste:	t de Student	t de Studenten	t de Student	t de Student	t de Student	Logística	t de Student	t de Student
Anderson-Darling	3.4968	1.8077	5.5321	2.0252	4.7700	16.2968	3.5478	14.9534

En la tabla 12 se encuentra la matriz de correlaciones

Tabla 12 Matriz de correlaciones Montecarlo

Correlaciones:	BANCOLOMBIA	GRUPOSURA	NUTRESA	ISA	GRUPOARGOS	GRUPO AVAL	CEMENTOS ARGOS	BANCO BOGOTA
BANCOLOMBIA	1	0.391015091	0.266125398	0.26044576	0.31188641	0.23481678	0.296878644	0.156716658
GRUPOSURA	0.391015091	1	0.310652223	0.368711737	0.453550897	0.24200273	0.355675535	0.187996018
NUTRESA	0.266125398	0.310652223	1	0.28878614	0.29025866	0.23956323	0.268763828	0.23977353
ISA	0.26044576	0.368711737	0.28878614	1	0.37384808	0.18042649	0.337796224	0.144479759
GRUPOARGOS	0.31188641	0.453550897	0.29025866	0.37384808	1	0.20671191	0.451166268	0.151233051
GRUPO AVAL	0.23481678	0.242002727	0.239563227	0.180426492	0.206711912	1	0.200815211	0.228288185
CEMENTOS ARGOS	0.296878644	0.355675535	0.268763828	0.337796224	0.451166268	0.20081521	1	0.136871277
BANCO BOGOTA	0.156716658	0.187996018	0.23977353	0.144479759	0.151233051	0.22828819	0.136871277	1

En la tabla 13 se encuentra el valor estimado para la media de acuerdo al mejor ajuste de los retornos a la distribución de probabilidad.

Tabla 13 Vector de Medias Montecarlo

ACCIÓN	MEDIA
BANCOLOMBIA	0.000074945
GRUPOSURA	0.00007302
NUTRESA	0.000063764
ISA	0.000014659
GRUPOARGOS	0.000022878
GRUPO AVAL	0.000045382
CEMENTOS ARGOS	0.00001159

La tabla 14 contiene la matriz de varianzas y covarianzas

Tabla 14 Matriz de Varianzas Montecarlo

	BANCOLOMBIA	GRUPOSURA	NUTRESA	ISA	GRUPOARGOS	GRUPO AVAL	CEMENTOS ARGOS	BANCO BOGOTA
BANCOLOMBIA	4.44996E-05	2.595E-05	1.7717E-05	7.48618E-06	1.89244E-05	1.57481E-05	2.56505E-05	1.47594E-05
GRUPOSURA	2.59501E-05	7.0225E-05	3.81184E-05	3.692E-06	3.24819E-05	2.67333E-05	5.55988E-05	3.68311E-05
NUTRESA	1.7717E-05	3.8118E-05	4.88444E-05	-8.0612E-08	2.07685E-05	2.33105E-05	4.277E-05	3.29956E-05
ISA	7.48618E-06	3.692E-06	-8.0612E-08	5.44584E-05	1.60152E-05	5.77705E-07	-1.41123E-06	-8.1598E-06
GRUPOARGOS	1.89244E-05	3.2482E-05	2.07685E-05	1.60152E-05	5.14083E-05	1.48799E-05	3.32161E-05	1.60121E-05
GRUPO AVAL	1.57481E-05	2.6733E-05	2.33105E-05	5.77705E-07	1.48799E-05	5.08221E-05	2.97468E-05	2.50779E-05
CEMENTOS ARGOS	2.56505E-05	5.5599E-05	4.277E-05	-1.4112E-06	3.32161E-05	2.97468E-05	0.00012408	4.26757E-05
BANCO BOGOTA	1.47594E-05	3.6831E-05	3.29956E-05	-8.1598E-06	1.60121E-05	2.50779E-05	4.26757E-05	5.59817E-05

Para el cálculo de la frontera eficiente se utiliza el vector de medias de la tabla 13 y la matriz de varianza covarianza de la tabla 5. En la tabla 15 se encuentra la conformación de los portafolios bajo esta metodología.

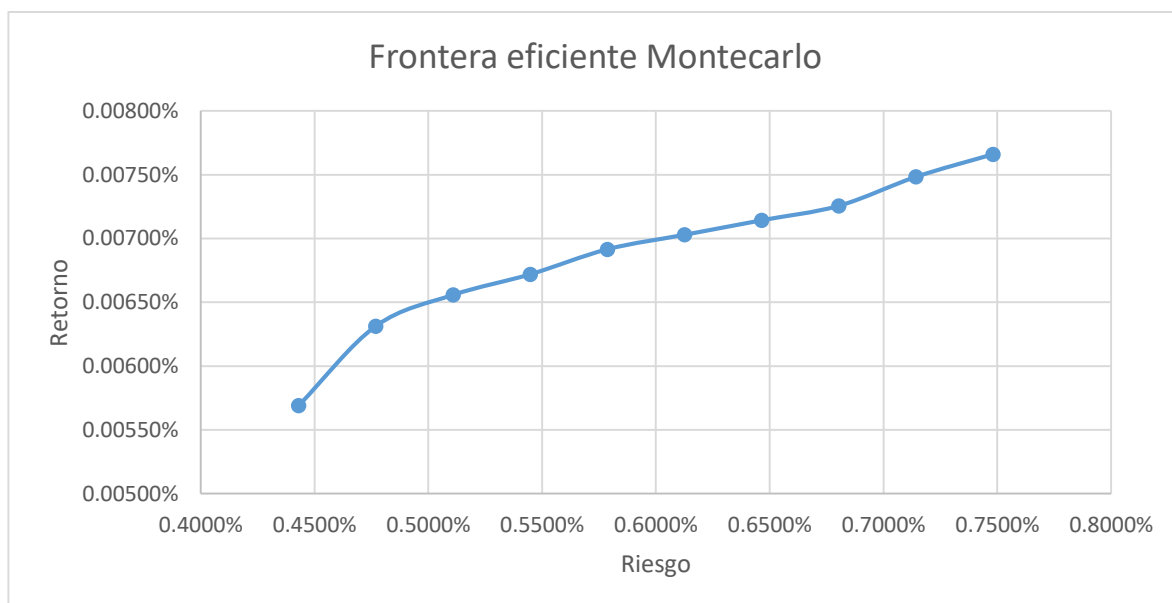
Tabla 15 Portafolio según el método de Montecarlo

PORTAFOLIO	BANCOLOMBIA	GRUPOSURA	NUTRESA	ISA	GRUPOARGOS	GRUPO AVAL	CEMENTOS ARGOS	BANCO BOGOTA	RIESGO	RETORNO
Mínima varianza	20,1%	0,0%	6,7%	31,1%	0,0%	14,9%	7,0%	20,2%	0,4431%	0,0057%
2	62,9%	0,0%	0,0%	18,0%	0,0%	4,4%	4,4%	10,1%	0,4770%	0,0063%
3	0,0%	0,0%	0,0%	16,7%	0,0%	32,0%	16,7%	34,6%	0,5109%	0,0066%
4	0,0%	0,0%	0,0%	4,6%	37,6%	0,0%	0,0%	57,8%	0,5448%	0,0067%
5	28,2%	39,1%	0,0%	0,0%	32,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,5787%	0,0069%
6	0,0%	3,0%	0,0%	84,8%	0,0%	0,0%	12,3%	0,0%	0,6126%	0,0070%
7	0,0%	0,0%	90,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	9,5%	0,6465%	0,0071%
8	35,4%	64,6%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,6804%	0,0073%
9	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,7143%	0,0075%
Máximo retorno	28,1%	62,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	9,4%	0,0%	0,7482%	0,0077%

La figura 6 muestra la frontera eficiente para los portafolios de inversión siguiendo la simulación por Montecarlo.



Figura 6 Frontera eficiente según la simulación por Montecarlo



La simulación por Montecarlo tiene portafolios con riesgo entre 0,4431% con un retorno de 0,00569% hasta 0,7482% con un retorno de 0,00766%

#### 5.4 Portafolios de inversión siguiendo el Modelo de Black-Litterman

En la implementación del modelo de Black-Litterman se procede al cálculo del vector de ponderaciones en equilibrio ( $w$ ) dado por las ponderaciones del índice COLCAP. En la tabla 16 se encuentra el porcentaje de participación de cada acción dentro del COLCAP.

Tabla 16 Ponderaciones de las acciones sobre el COLCAP

Capitalización en COLCAP	
BANCOLOMBIA	8,550%
GRUPOSURA	5,539%
NUTRESA	3,214%
ISA	4,028%
GRUPOARGOS	4,183%

GRUPO AVAL	6,733%
CEMENTOS ARGOS	3,311%
BANCO BOGOTA	5,906%
<b>Total</b>	<b>41,465%</b>

En la tabla 17 están las ponderaciones ( $w$ ) de cada acción dependiendo de la capitalización sobre el COLCAP.

*Tabla 17 Ponderaciones  $w$*

<b>Ponderaciones <math>w</math></b>	
BANCOLOMBIA	20,62%
GRUPOSURA	13,36%
NUTRESA	7,75%
ISA	9,71%
GRUPOARGOS	10,09%
GRUPO AVAL	16,24%
CEMENTOS ARGOS	7,98%
BANCO BOGOTA	14,24%

El coeficiente de aversión al riesgo  $\delta$  es el propuesto por el autor (blacklitterman.org, 2014) con un valor de 2,5. La tasa libre de riesgo  $R_f$  tomada del Banco de la República (banrep, 2018), de corto plazo con vencimiento junio 2018 con valor de 5,4% efectivo anual. El valor de  $\tau$  es el estimado por el autor (blacklitterman.org, 2014) cuyo valor es 0,05.

Para la construcción de la matriz de las vistas del experto, se consulta las perspectivas del analista de renta variable de Casa de Bolsa, Ómar Suárez, consultado por la sección de Economía y Negocios del periódico El Espectador del 13 de junio de 2017 (Espectador, 2017). En la tabla 18 están las vistas del experto, la matriz “P”.

Tabla 18 Vistas del experto en renta variable

Acción	Vista 1	Vista 2	Vista 3
BANCOLOMBIA	0	0	0
GRUPOSURA	0	1	0
NUTRESA	1	0	0
ISA	0	0	0
GRUPOARGOS	0	0	1
GRUPO AVAL	0	0	0
CEMENTOS			
ARGOS	0	0	0
BANCO BOGOTA	0	0	0

En la tabla 19 aparece las perspectivas que tiene el experto sobre las vistas, la matriz “Q”, expresado en términos de un día.

Tabla 19 Perspectivas sobre las vistas

Vista 1	Vista 2	Vista 3
0,00041	0,000532786	0,000560655

En la tabla 20 está la matriz  $\Omega$  diagonal.

Tabla 20 Matriz  $\Omega$  diagonal

Matriz omega diagonal		
1,29484E-05	0	0
0	1,862E-05	0
0	0	1,363E-05

La tabla 21 corresponde a la matriz de correlaciones de los retornos.

Tabla 21 Matriz de correlaciones de los retornos

	BANCOLOMBIA	GRUPOSURA	NUTRESA	ISA	GRUPOARGOS	GRUPO AVAL	CEMENTOS ARGOS	BANCO BOGOTA
BANCOLOMBIA	1,0000	0,4642	0,3800	0,1521	0,3957	0,3311	0,3452	0,2957
GRUPOSURA	0,4642	1,0000	0,6509	0,0597	0,5406	0,4475	0,5956	0,5874
NUTRESA	0,3800	0,6509	1,0000	-0,0016	0,4145	0,4679	0,5494	0,6310
ISA	0,1521	0,0597	-0,0016	1,0000	0,3027	0,0110	-0,0172	-0,1478
GRUPOARGOS	0,3957	0,5406	0,4145	0,3027	1,0000	0,2911	0,4159	0,2985
GRUPO AVAL	0,3311	0,4475	0,4679	0,0110	0,2911	1,0000	0,3746	0,4702
CEMENTOS ARGOS	0,3452	0,5956	0,5494	-0,0172	0,4159	0,3746	1,0000	0,5120
BANCO BOGOTA	0,2957	0,5874	0,6310	-0,1478	0,2985	0,4702	0,5120	1,0000

La tabla 22 contiene el valor esperado del retorno para cada acción una vez aplicada la fórmula maestra del modelo de Black-Litterman expresado en un día.

Tabla 22 Retorno esperado

Acción	Valor esperado
BANCOLOMBIA	0,0003794
GRUPOSURA	0,0004581
NUTRESA	0,0004015
ISA	0,0003467
GRUPOARGOS	0,0004542
GRUPO AVAL	0,0003729
CEMENTOS ARGOS	0,0004448
BANCO BOGOTA	0,0003794

En la tabla 23 está la matriz de varianza y covarianza para los retornos estimados.

Tabla 23 Matriz de varianza covarianza sobre los retornos esperados

	BANCOLOMBIA	GRUPOSURA	NUTRESA	ISA	GRUPOARGOS	GRUPO AVAL	CEMENTOS ARGOS	BANCO BOGOTA
BANCOLOMBIA	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
GRUPOSURA	0,0001	0,0004	0,0002	0,0000	0,0002	0,0001	0,0003	0,0002
NUTRESA	0,0001	0,0002	0,0003	0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
ISA	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
GRUPOARGOS	0,0001	0,0002	0,0001	0,0001	0,0003	0,0001	0,0002	0,0001
GRUPO AVAL	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001	0,0003	0,0002	0,0001
CEMENTOS ARGOS	0,0001	0,0003	0,0002	0,0000	0,0002	0,0002	0,0007	0,0002
BANCO BOGOTA	0,0001	0,0002	0,0002	0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003

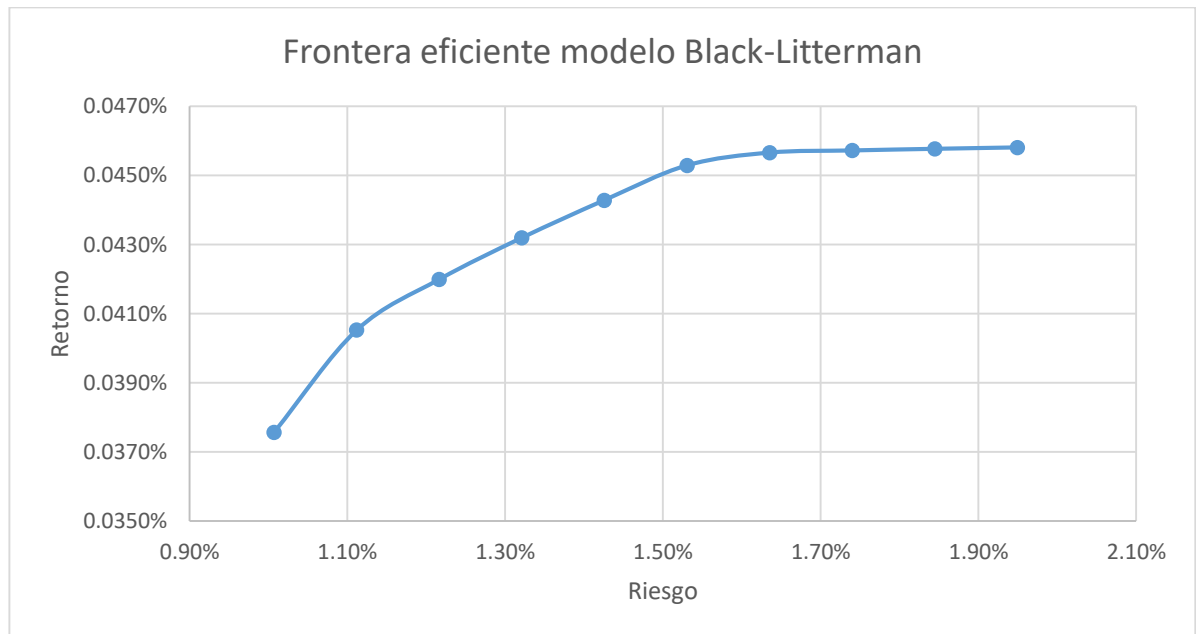
Para el cálculo de la frontera eficiente se utiliza el vector de retorno esperado de la tabla 22 y la matriz de varianza covarianza de la tabla 23. En la tabla 24 se encuentra la conformación de los portafolios bajo esta metodología.

Tabla 24 Portafolio según el modelo de Black-Litterman

PORTAFOLIO	BANCOLOMBIA	GRUPOSURA	NUTRESA	ISA	GRUPOARGOS	GRUPO AVAL	CEMENTOS ARGOS	BANCO BOGOTA	RIESGO	RETORNO
Mínima varianza	18,48%	0,00%	9,18%	32,24%	5,63%	15,00%	0,00%	19,48%	1,0071%	0,0376%
2	13,37%	9,17%	10,09%	19,34%	30,12%	8,57%	0,00%	9,33%	1,1118%	0,0405%
3	8,76%	16,95%	9,56%	12,53%	38,73%	6,05%	0,00%	7,41%	1,2165%	0,0420%
4	6,21%	23,70%	7,84%	8,78%	46,62%	2,61%	0,00%	4,23%	1,3212%	0,0432%
5	3,06%	27,53%	6,89%	3,81%	55,36%	1,21%	0,00%	2,14%	1,4259%	0,0443%
6	0,00%	32,22%	4,70%	0,00%	62,34%	0,00%	0,74%	0,00%	1,5306%	0,0453%
7	0,00%	61,44%	0,00%	0,00%	38,56%	0,00%	0,00%	0,00%	1,6353%	0,0457%
8	0,00%	77,36%	0,00%	0,00%	22,64%	0,00%	0,00%	0,00%	1,7400%	0,0457%
9	0,00%	89,52%	0,00%	0,00%	10,48%	0,00%	0,00%	0,00%	1,8447%	0,0458%
Máximo retorno	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,9494%	0,0458%

La figura 7 muestra la frontera eficiente para los portafolios de inversión siguiendo la metodología de Black-Litterman.

Figura 7 Frontera eficiente según el modelo de Black-Litterman



El valor mínimo esperado del riesgo es de 1.01% con un retorno de 0.0376% y el riesgo máximo es de 1,95% con un retorno de 0,0458%

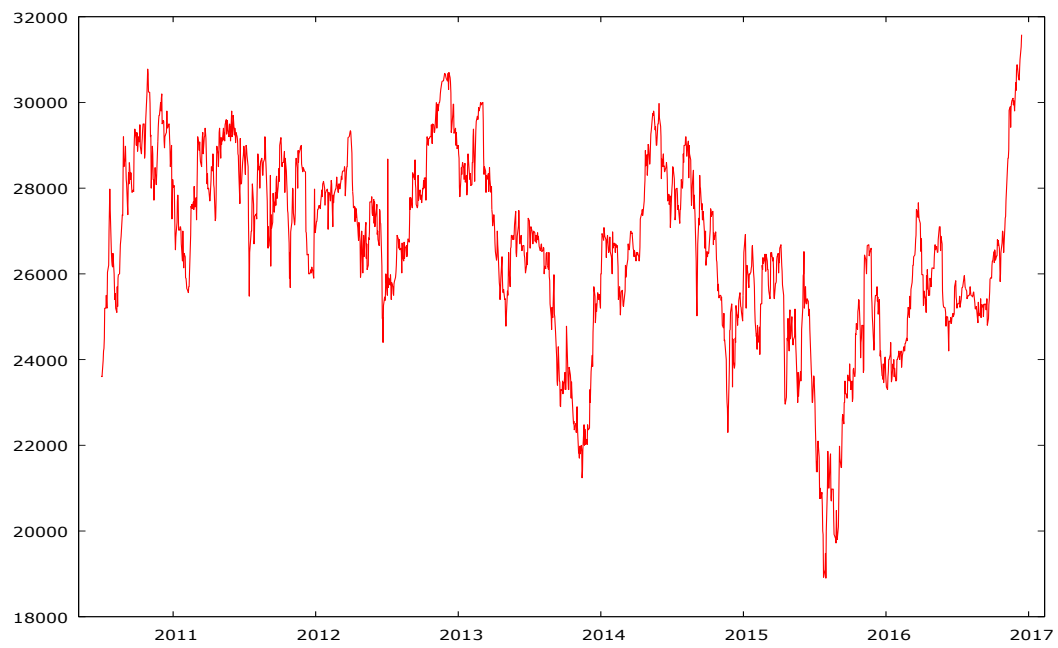
## 5.5 Portafolios de inversión a través de los modelos ARCH - GARCH

Para estimar la volatilidad de los retornos se emplea la metodología propuesta por Box y Jenkis que incluye los siguientes pasos.

### I. Identificación:

La metodología de Box-Jenkins requiere que las series cumplan con las condiciones de estacionariedad, que son: Media constante, varianza constante y estructura de autocorrelación constante, en las figuras del 8 al 15 se encuentran las gráficas para las series de tiempo de las acciones que permita identificar la posible tendencia.

*Figura 8* Diagrama de serie de tiempo asociada a Bancolombia



*Figura 9* Diagrama de serie de tiempo asociada a Grupo Sura

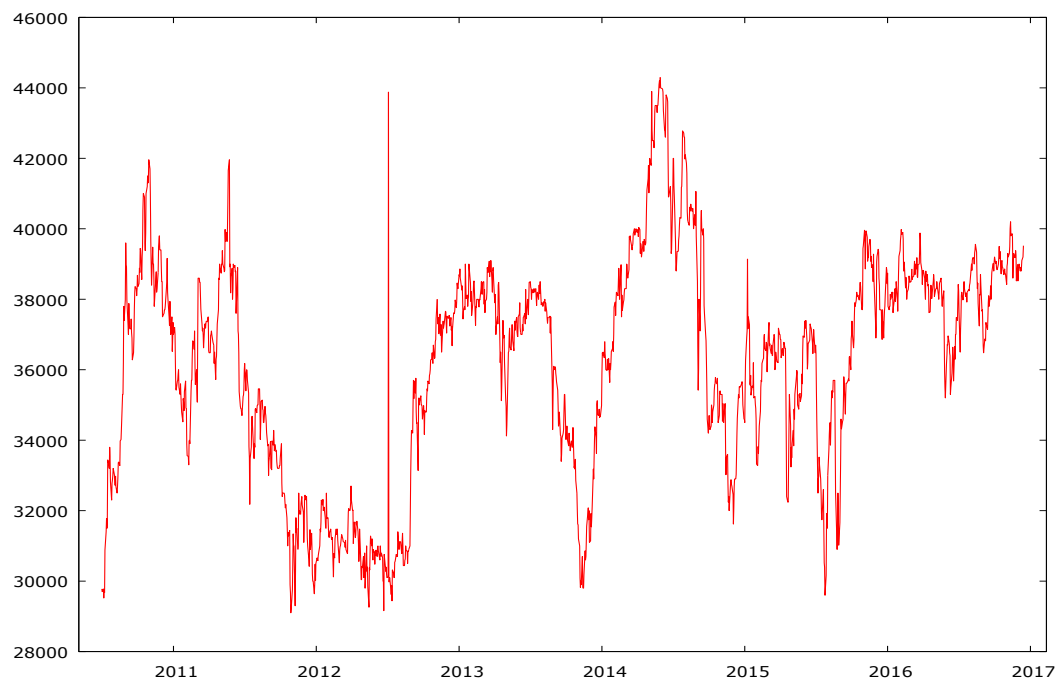


Figura 10 Diagrama de serie de tiempo asociada a Nutresa

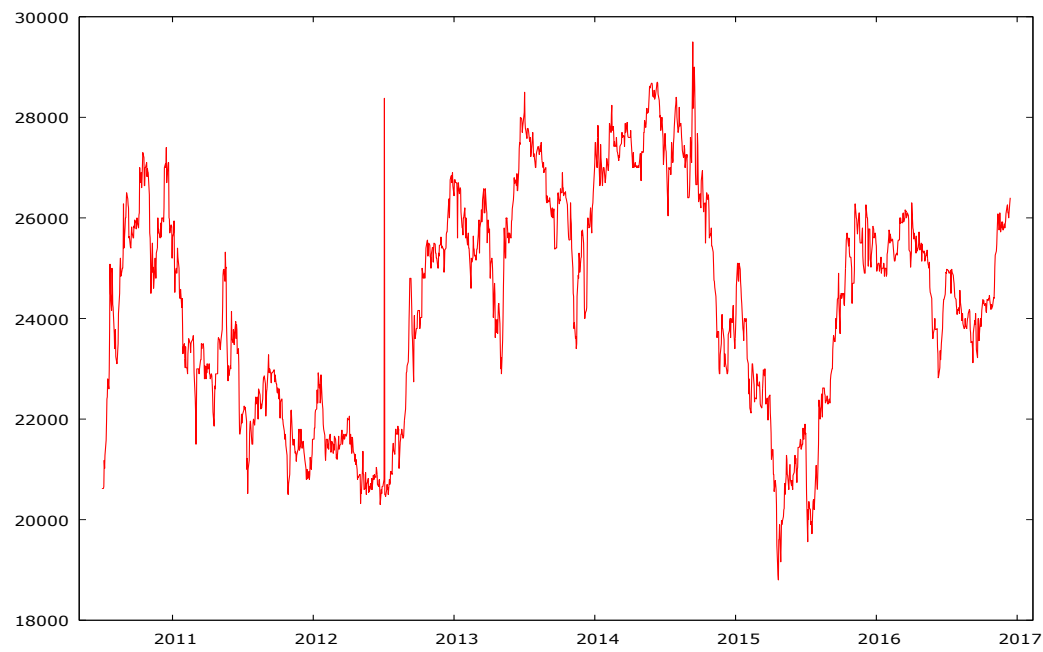


Figura 11 Diagrama de serie de tiempo asociada a ISA

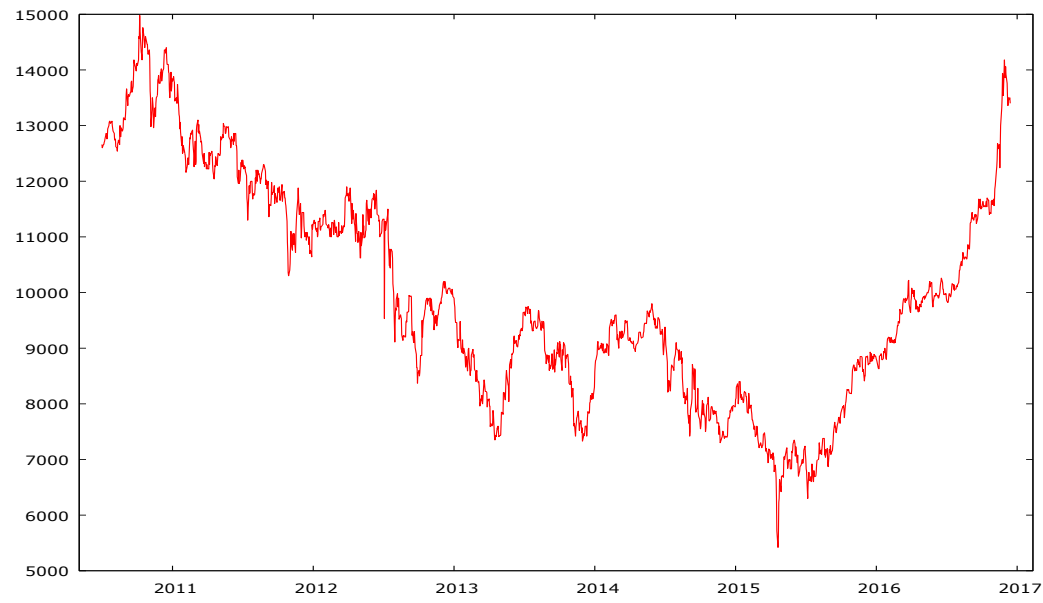




Figura 12 Diagrama de serie de tiempo asociada a Grupo Argos

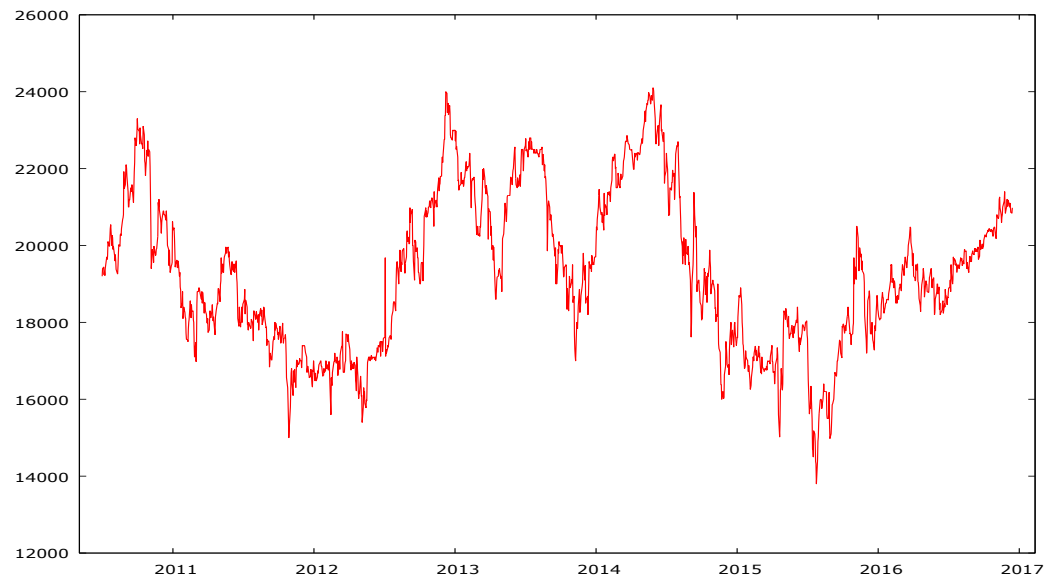


Figura 13 Diagrama de serie de tiempo asociada a Grupo Aval



*Figura 14 Diagrama de serie de tiempo asociada a Cementos Argos*



*Figura 15 Diagrama de serie de tiempo asociada a Banco Bogotá*



Se puede apreciar en las gráficas que las series presentan tendencia, para confirmarla se realiza la prueba de raíz unitaria de Dickey-Fuller Aumentado (ADF) (Alonso, 2010). Tabla 2, con la siguiente prueba de hipótesis:

- Hipótesis nula: La serie presenta una raíz unitaria, por tanto, el proceso es no estacionario.
- Hipótesis alterna: La serie es estacionaria

*Tabla 25 Prueba de raíz unitaria*

<b>Activo</b>	<b>p-valor</b>
BANCOLOMBIA	0,01668
GRUPOSURA	0,01252
NUTRESA	0,05254
ISA	0,7017
GRUPOARGOS	0,07486
GRUPO AVAL	0,002491
CEMENTOS ARGOS	0,06425
BANCO BOGOTA	0,0765
COLCAP	0,5771

La hipótesis es rechazada por las acciones de Bancolombia, Gruposura y Grupo Aval, por tanto, estas series son estacionarias en media, las demás series presentan tendencia.

Para eliminar la tendencia, se trabaja, como se había indicado con anterioridad, con los retornos de todas las series. La tabla 26 muestra los resultados de la prueba de raíz unitaria de Dickey-Fuller Aumentado (ADF) sobre las series diferenciadas para confirmar la estacionalidad en media de las series.

Tabla 26 Prueba de raíz unitaria para las series diferenciadas

<b>Activo</b>	<b>p-valor</b>
BANCOLOMBIA	0,0001
GRUPOSURA	$4,615 \cdot 10^{-40}$
NUTRESA	$1,413 \cdot 10^{-51}$
ISA	$9,143 \cdot 10^{-18}$
GRUPOARGOS	$3,389 \cdot 10^{-48}$
GRUPO AVAL	$1,494 \cdot 10^{-45}$
CEMENTOS	$1,771 \cdot 10^{-41}$
ARGOS	
BANCO BOGOTA	$1,909 \cdot 10^{-50}$

Dado que el p-valor para cada serie es menor al 5%, se concluye que las series de los retornos son estacionarias en media, por tanto es posible la identificación del modelo ARIMA(p,d,q) . Para establecer el orden de los rezagos autorregresivos (p) y de medias móviles(q) que son significativos en la serie se tendrán en cuenta las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial. Las gráficas de autocorrelación y autocorrelación parcial correspondientes a cada serie estacionaria se encuentran en el anexo 1.

## II. Estimación

La estimación se realizó usando el software EViews 9.0. En la tabla 27 se encuentra el modelo ARIMA(p,q) que mejor ajuste presentó para cada serie.

Tabla 27 Modelos ARMA

SERIE	MODELO ARMA	ECUACIÓN
BANCOLOMBIA	(1,0)	$Y_t = -0,087910*Y_{t-1} + E_t$
GRUPOSURA	(1,1)	$Y_t = 0,165970*Y_{t-1} - 0,389460*a_{t-1} + E_t$
NUTRESA	(1,1)	$Y_t = 0,155248*Y_{t-1} - 0,37878*a_{t-1} + E_t$
ISA	(1,1)	$Y_t = 0,531699*Y_{t-1} - 0,611854*a_{t-1} + E_t$
GRUPOARGOS	(5,0)	$Y_t = -0,043581*Y_{t-1} - 0,046026*Y_{t-3} - 0,061915*Y_{t-4} - 0,043176*Y_{t-5} + E_t$
GRUPO AVAL	(0,1)	$Y_t = -0,135758*a_{t-1} + E_t$
CEMENTOS ARGOS	(0,1)	$Y_t = -0,209793*a_{t-1} + E_t$
BANCO BOGOTÁ	(1,1)	$Y_t = 0,000205 + 0,077306*Y_{t-1} - 0,586293*a_{t-1} + E_t$

Todos los parámetros estimados en los modelos ARMA son significativos al 5%. La estimación de los parámetros con EViews se encuentra en el anexo 2.

### III. Diagnóstico

Uno de los requerimientos de la metodología de Box-Jenkins es que la varianza al igual que la media también sea constante, es decir, sea homoscedástica, para lo cual se realizará el test de White sobre el cuadrado de los errores de estimación del modelo ARMA para cada serie (Arce & Mahía, 2009), cuya prueba de hipótesis es:

- Hipótesis nula: La distribución de los errores al cuadrado es homoscedástica
- Hipótesis alterna: La distribución de los errores al cuadrado es heteroscedástica

El p-valor de la prueba de White para cada serie se muestra en la tabla 28.

*Tabla 28 Prueba de White*

<b><i>Serie</i></b>	<b><i>p-valor</i></b>
BANCOLOMBIA	0,0000
GRUPO SURA	0,0000
NUTRESA	0,0000
ISA	0,0000
GRUPO ARGOS	0,0000
GRUPO AVAL	0,0000
CEMENTOS ARGOS	0,0000
BANCO BOGOTÁ	0,0000

Según la prueba de White, todas las series presentan heteroscedasticidad, indicando la presencia de agrupamiento de la volatilidad, es decir, a grandes cambios en la volatilidad siguen grandes cambios de esta y a pequeños cambios en la volatilidad le siguen pequeños cambios, este es un comportamiento típico de las series financieras (Cifuentes & Arcos, 2006).

Dada la presencia de heteroscedasticidad en las series, se estimará la varianza a través de los modelos de heteroscedasticidad condicional autorregresiva ARCH y sus variantes. Los modelos ARMA-ARCH fueron estimados usando el software EViews 9. Se probaron varios modelos ARCH para cada serie, de éstos fue seleccionado el modelo cuyos parámetros fueran estadísticamente significativos en la ecuación de la varianza con el menor valor para el criterio de información de Akaike.

La tabla 29 muestra las estimaciones de los parámetros de la varianza para el modelo EGARCH(1,3) de la serie de retornos de Bancolombia.

Tabla 29 Coeficientes para la varianza de los retornos de Bancolombia EGARCH(1,3)

	<b>Coeficiente</b>	<b>p-valor</b>
$\beta_0$	-0,735027	0,0000
$\beta_1$	0,435211	0,0000
$\beta_2$	-0,142547	0,0111
$\beta_3$	0,647848	0,0000
$\alpha_1$	0,313890	0,0000
$\gamma_1$	-0,087346	0,0000

La tabla 30 muestra las estimaciones de los parámetros de la varianza para el modelo GARCH(1,1) de la serie de retornos de Grupo Sura.

Tabla 30 Coeficientes para la varianza de los retornos de Grupo Sura GARCH(1,1)

	<b>Coeficiente</b>	<b>p-valor</b>
$\omega$	$5,22 \cdot 10^{-5}$	0,0000
$\alpha$	0,286027	0,0000
$\beta$	0,564184	0,0000

La tabla 31 muestra las estimaciones de los parámetros de la varianza para el modelo GARCH(1,1) de la serie de retornos de Nutresa.

Tabla 31 Coeficientes para la varianza de los retornos de Nutresa GARCH(1,1)

	<b>Coeficiente</b>	<b>p-valor</b>
$\omega$	$4,26 \cdot 10^{-5}$	0,0000
$\alpha$	0,289537	0,0000
$\beta$	0,499332	0,0000

La tabla 32 muestra las estimaciones de los parámetros de la varianza para el modelo GARCH(1,1) de la serie de retornos de Isa.

Tabla 32 Coeficientes para la varianza de los retornos de ISA GARCH(1,1)

	<b>Coeficiente</b>	<b>p-valor</b>
$\omega$	$7,43 \cdot 10^{-6}$	0,0009
$\alpha$	0,115599	0,0000
$\beta$	0,870318	0,0000

La tabla 33 muestra las estimaciones de los parámetros de la varianza para el modelo GARCH(1,1) de la serie de retornos de Grupo Argos.

Tabla 33 Coeficientes para la varianza de los retornos de Grupo Argos GARCH(1,1)

	<b>Coeficiente</b>	<b>p-valor</b>
$\omega$	$4,41 \cdot 10^{-5}$	0,0000
$\alpha$	0,153285	0,0000
$\beta$	0,687475	0,0000



La tabla 34 muestra las estimaciones de los parámetros de la varianza para el modelo GARCH(1,1) de la serie de retornos de Grupo Aval.

*Tabla 34* Coeficientes para la varianza de los retornos de Grupo Aval GARCH(1,1)

	<b>Coeficiente</b>	<b>p-valor</b>
$\omega$	0,000113	0,0001
$\alpha$	0,337782	0,0005
$\beta$	0,380641	0,0000

La tabla 35 muestra las estimaciones de los parámetros de la varianza para el modelo GARCH(0,1) de la serie de retornos de Cementos argos.

*Tabla 35* Coeficientes para la varianza de los retornos de Cementos Argos GARCH(0,1)

	<b>Coeficiente</b>	<b>p-valor</b>
$\omega$	0,000231	0,0000
$\alpha$	0,416074	0,0000

La tabla 36 muestra las estimaciones de los parámetros de la varianza para el modelo GARCH(1,0) de la serie de retornos de Banco Bogotá.

*Tabla 36* Coeficientes para la varianza de los retornos de Banco Bogotá GARCH(1,0)

	<b>Coeficiente</b>	<b>p-valor</b>
$\omega$	0,000207	0,0000
$\alpha$	0,078351	0,0000

La estimación de los parámetros con EViews de los modelos GARCH se encuentra en el anexo 3.

#### IV. Validación

Una vez estimados los parámetros de los modelos ARCH-GARCH se realiza nuevamente la prueba de hipótesis para determinar si persiste el efecto ARCH en la distribución de los residuos al cuadrado para cada modelo usando el test Arch LM de EViews.

Prueba de heteroscedasticidad:

- Hipótesis nula: La distribución de los errores al cuadrado no presenta efecto ARCH
- Hipótesis alterna: La distribución de los errores al cuadrado presenta efecto ARCH

En la tabla 37 está el p-valor correspondiente a la prueba de hipótesis.

*Tabla 37* Prueba de heteroscedasticidad de los residuos al cuadrado para los modelos ARCH-GARCH

<b><i>Serie</i></b>	<b><i>p-valor</i></b>
BANCOLOMBIA	0,17
GRUPOSURA	0,9627
NUTRESA	0,9307
ISA	0,3892
GRUPOARGOS	0,0559
GRUPOAVAL	0,9348
CEMENTOS ARGOS	0,9549
BANCO BOGOTÁ	0,5756

Como puede verse en la tabla 37, todos los p-valor son mayores al 5%, por tanto, las series no presentan heteroscedasticidad.

Por último, se verifica que no existe autocorrelación en las series usando los correlogramas de los residuos al cuadrado sobre las estimaciones de los modelos ARCH-GARCH y la siguiente prueba de hipótesis:

- Hipótesis nula: La serie no presenta autocorrelación.
- Hipótesis alterna: La serie presenta autocorrelación.

La tabla 38 muestra las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial para Bancolombia.

*Tabla 38 Autocorrelación y autocorrelación parcial Bancolombia*

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*	
		1	0.047	0.047	3.6705	0.055
		2	0.020	0.017	4.3204	0.115
		3	-0.019	-0.021	4.9299	0.177
		4	-0.039	-0.038	7.5192	0.111
		5	-0.021	-0.016	8.2343	0.144
		6	-0.012	-0.009	8.4652	0.206
		7	-0.009	-0.009	8.6043	0.282
		8	0.002	0.001	8.6118	0.376
		9	-0.039	-0.040	11.148	0.266
		10	0.001	0.003	11.151	0.346
		11	0.011	0.012	11.370	0.413
		12	-0.024	-0.027	12.314	0.421
		13	0.008	0.007	12.424	0.493
		14	-0.020	-0.021	13.105	0.518
		15	0.023	0.024	13.980	0.527
		16	0.011	0.008	14.200	0.584
		17	-0.009	-0.011	14.334	0.643
		18	-0.021	-0.023	15.065	0.657
		19	0.001	0.005	15.067	0.718
		20	-0.005	-0.002	15.108	0.770
		21	-0.042	-0.045	18.063	0.645
		22	-0.046	-0.043	21.700	0.478
		23	-0.017	-0.013	22.165	0.510
		24	-0.009	-0.007	22.292	0.562
		25	-0.001	-0.004	22.294	0.619
		26	0.016	0.008	22.710	0.649
		27	0.013	0.007	22.979	0.686
		28	-0.019	-0.024	23.624	0.701

La tabla 39 muestra las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial para Gruposura.

Tabla 39 Autocorrelación y autocorrelación parcial Gruposura

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob*	
				1	0.001	0.001	0.0022	0.963
				2	-0.003	-0.003	0.0139	0.993
				3	-0.002	-0.002	0.0221	0.999
				4	-0.003	-0.003	0.0332	1.000
				5	-0.002	-0.002	0.0413	1.000
				6	-0.002	-0.002	0.0503	1.000
				7	0.005	0.005	0.0968	1.000
				8	0.003	0.003	0.1084	1.000
				9	-0.002	-0.002	0.1168	1.000
				10	0.001	0.001	0.1201	1.000
				11	-0.002	-0.002	0.1297	1.000
				12	-0.002	-0.002	0.1341	1.000
				13	-0.002	-0.002	0.1428	1.000
				14	-0.002	-0.002	0.1492	1.000
				15	-0.001	-0.001	0.1506	1.000
				16	-0.002	-0.002	0.1570	1.000
				17	-0.003	-0.003	0.1676	1.000
				18	0.002	0.002	0.1737	1.000
				19	-0.002	-0.002	0.1784	1.000
				20	-0.001	-0.001	0.1820	1.000
				21	-0.002	-0.002	0.1908	1.000
				22	-0.002	-0.002	0.1988	1.000
				23	-0.003	-0.003	0.2099	1.000
				24	-0.001	-0.001	0.2111	1.000
				25	-0.001	-0.001	0.2118	1.000
				26	-0.002	-0.002	0.2188	1.000
				27	-0.001	-0.001	0.2208	1.000
				28	-0.000	-0.000	0.2211	1.000

La tabla 40 muestra las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial para Nutresa.

Tabla 40 Autocorrelación y autocorrelación parcial Nutresa

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob*	
				1	0.002	0.002	0.0076	0.931
				2	-0.003	-0.003	0.0207	0.990
				3	-0.002	-0.002	0.0310	0.999
				4	-0.002	-0.002	0.0392	1.000
				5	-0.002	-0.002	0.0457	1.000
				6	-0.001	-0.001	0.0472	1.000
				7	-0.001	-0.001	0.0479	1.000
				8	-0.001	-0.001	0.0496	1.000
				9	-0.002	-0.002	0.0557	1.000
				10	-0.002	-0.002	0.0613	1.000
				11	-0.002	-0.002	0.0713	1.000
				12	-0.001	-0.001	0.0725	1.000
				13	-0.002	-0.002	0.0798	1.000
				14	-0.002	-0.002	0.0882	1.000
				15	0.003	0.003	0.1086	1.000
				16	-0.002	-0.002	0.1173	1.000
				17	-0.002	-0.002	0.1272	1.000
				18	-0.001	-0.001	0.1305	1.000
				19	-0.002	-0.002	0.1401	1.000
				20	-0.001	-0.001	0.1426	1.000
				21	0.001	0.001	0.1432	1.000
				22	-0.001	-0.001	0.1465	1.000
				23	-0.001	-0.001	0.1475	1.000
				24	-0.002	-0.002	0.1575	1.000
				25	-0.001	-0.001	0.1610	1.000
				26	-0.001	-0.001	0.1633	1.000
				27	-0.002	-0.002	0.1699	1.000
				28	0.011	0.011	0.3884	1.000

La tabla 41 muestra las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial para ISA.

Tabla 41 Autocorrelación y autocorrelación parcial ISA

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*	
		1	0.021	0.021	0.7440	0.388
		2	-0.006	-0.006	0.8053	0.669
		3	-0.007	-0.006	0.8819	0.830
		4	-0.004	-0.004	0.9130	0.923
		5	-0.009	-0.009	1.0387	0.959
		6	-0.009	-0.009	1.1688	0.978
		7	-0.012	-0.011	1.3934	0.986
		8	0.011	0.011	1.6004	0.991
		9	-0.005	-0.006	1.6509	0.996
		10	-0.010	-0.010	1.8205	0.998
		11	-0.012	-0.012	2.0600	0.998
		12	-0.009	-0.009	2.2086	0.999
		13	-0.002	-0.002	2.2133	1.000
		14	-0.002	-0.002	2.2213	1.000
		15	-0.007	-0.007	2.3122	1.000
		16	0.006	0.006	2.3739	1.000
		17	0.003	0.002	2.3919	1.000
		18	-0.005	-0.006	2.4386	1.000
		19	0.036	0.037	4.6889	1.000
		20	-0.006	-0.007	4.7439	1.000
		21	-0.004	-0.004	4.7730	1.000
		22	-0.010	-0.010	4.9455	1.000
		23	-0.007	-0.007	5.0304	1.000
		24	-0.005	-0.005	5.0780	1.000
		25	-0.010	-0.010	5.2454	1.000
		26	-0.010	-0.009	5.4052	1.000
		27	-0.006	-0.007	5.4619	1.000
		28	0.004	0.004	5.4870	1.000

La tabla 42 muestra las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial para Grupo Argos.

Tabla 42 Autocorrelación y autocorrelación parcial Grupo Argos

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*	
		1	0.047	0.047	3.6642	0.056
		2	-0.017	-0.019	4.1431	0.126
		3	-0.026	-0.024	5.2807	0.152
		4	-0.022	-0.020	6.0757	0.194
		5	0.027	0.028	7.3262	0.197
		6	-0.011	-0.015	7.5365	0.274
		7	0.014	0.015	7.8657	0.345
		8	-0.006	-0.007	7.9347	0.440
		9	0.002	0.003	7.9387	0.540
		10	-0.006	-0.007	8.0045	0.628
		11	-0.010	-0.008	8.1803	0.697
		12	0.002	0.001	8.1842	0.771
		13	0.006	0.006	8.2367	0.828
		14	-0.013	-0.015	8.5250	0.860
		15	-0.011	-0.010	8.7481	0.890
		16	-0.016	-0.015	9.1787	0.906
		17	-0.020	-0.019	9.8511	0.910
		18	0.002	0.002	9.8552	0.937
		19	-0.017	-0.018	10.322	0.945
		20	0.108	0.109	30.140	0.068
		21	-0.007	-0.019	30.231	0.087
		22	0.045	0.051	33.619	0.054
		23	-0.010	-0.012	33.800	0.068
		24	-0.002	0.007	33.808	0.088
		25	0.005	-0.001	33.859	0.111
		26	0.003	0.008	33.870	0.138
		27	0.020	0.013	34.584	0.150
		28	0.000	0.002	34.584	0.182

La tabla 43 muestra las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial para Grupo Aval.

Tabla 43 Autocorrelación y autocorrelación parcial Grupo Aval

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*	
		1	-0.002	-0.002	0.0067	0.935
		2	-0.003	-0.003	0.0209	0.990
		3	-0.006	-0.006	0.0771	0.994
		4	-0.001	-0.001	0.0783	0.999
		5	0.041	0.041	2.8610	0.721
		6	0.051	0.052	7.3324	0.291
		7	-0.009	-0.008	7.4676	0.382
		8	0.018	0.018	7.9986	0.434
		9	-0.002	-0.001	8.0039	0.534
		10	0.002	0.001	8.0131	0.628
		11	0.016	0.012	8.4417	0.673
		12	0.015	0.014	8.8374	0.717
		13	-0.012	-0.012	9.0841	0.767
		14	0.015	0.013	9.4554	0.801
		15	0.007	0.008	9.5428	0.847
		16	0.002	0.001	9.5526	0.889
		17	-0.005	-0.007	9.5876	0.920
		18	0.004	0.004	9.6126	0.944
		19	0.003	0.003	9.6260	0.962
		20	0.003	0.000	9.6402	0.974
		21	0.002	0.002	9.6497	0.983
		22	-0.001	-0.001	9.6512	0.989
		23	-0.005	-0.005	9.6933	0.993
		24	-0.003	-0.004	9.7101	0.996
		25	0.008	0.008	9.8201	0.997
		26	0.002	0.001	9.8277	0.998
		27	-0.000	-0.001	9.8281	0.999
		28	-0.006	-0.005	9.8848	0.999

La tabla 44 muestra las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial para Cementos Argos.

Tabla 44 Autocorrelación y autocorrelación parcial Cementos Argos

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*
		1 -0.001	-0.001	0.0032	0.955
		2 -0.002	-0.002	0.0114	0.994
		3 -0.002	-0.002	0.0188	0.999
		4 -0.002	-0.002	0.0259	1.000
		5 -0.003	-0.003	0.0383	1.000
		6 0.032	0.032	1.7349	0.942
		7 -0.000	-0.000	1.7350	0.973
		8 -0.001	-0.001	1.7361	0.988
		9 -0.003	-0.002	1.7467	0.995
		10 -0.002	-0.002	1.7528	0.998
		11 0.001	0.001	1.7533	0.999
		12 0.001	-0.000	1.7540	1.000
		13 -0.000	-0.000	1.7542	1.000
		14 -0.002	-0.002	1.7598	1.000
		15 -0.003	-0.003	1.7762	1.000
		16 0.005	0.005	1.8141	1.000
		17 -0.002	-0.002	1.8213	1.000
		18 0.001	0.000	1.8218	1.000
		19 -0.002	-0.002	1.8302	1.000
		20 0.000	0.000	1.8303	1.000
		21 0.000	0.001	1.8305	1.000
		22 -0.002	-0.002	1.8352	1.000
		23 -0.002	-0.002	1.8455	1.000
		24 -0.003	-0.003	1.8566	1.000
		25 -0.003	-0.003	1.8724	1.000
		26 -0.003	-0.003	1.8897	1.000
		27 -0.002	-0.002	1.8981	1.000
		28 -0.003	-0.003	1.9110	1.000

La tabla 45 muestra las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial para Banco de Bogotá.

Tabla 45 Autocorrelación y autocorrelación parcial Banco de Bogotá

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*	
		1	0.014	0.014	0.3145	0.575
		2	-0.001	-0.002	0.3176	0.853
		3	0.000	0.000	0.3176	0.957
		4	-0.002	-0.002	0.3221	0.988
		5	-0.001	-0.001	0.3248	0.997
		6	-0.001	-0.001	0.3273	0.999
		7	-0.002	-0.002	0.3325	1.000
		8	-0.001	-0.001	0.3345	1.000
		9	-0.002	-0.002	0.3415	1.000
		10	-0.002	-0.002	0.3459	1.000
		11	-0.002	-0.002	0.3501	1.000
		12	-0.001	-0.001	0.3531	1.000
		13	-0.002	-0.002	0.3616	1.000
		14	-0.002	-0.002	0.3660	1.000
		15	-0.002	-0.002	0.3703	1.000
		16	-0.002	-0.002	0.3755	1.000
		17	0.000	0.000	0.3755	1.000
		18	-0.000	-0.000	0.3756	1.000
		19	-0.002	-0.002	0.3850	1.000
		20	-0.002	-0.002	0.3946	1.000
		21	-0.001	-0.001	0.3976	1.000
		22	-0.002	-0.002	0.4059	1.000
		23	-0.002	-0.002	0.4158	1.000
		24	-0.001	-0.001	0.4192	1.000
		25	-0.002	-0.002	0.4281	1.000
		26	-0.002	-0.002	0.4322	1.000
		27	-0.002	-0.002	0.4365	1.000
		28	-0.002	-0.002	0.4457	1.000

Como se verifica en las funciones de autocorrelación, ninguna de las series rechaza la hipótesis nula por tener valores superiores al 5%, por tanto, no existe presencia de autocorrelación.

En la tabla 46 se encuentra la varianza condicional estimada a partir de los modelos ARCH-GARCH.

Tabla 46 Varianza condicional estimada para el año siguiente

Varianza condicional estimada con los modelos ARCH-GARCH							
BANCOLOMBIA	GRUPOSURA	NUTRESA	ISA	GRUPOARGOS	GRUPO AVAL	CEMENTOS ARGOS	BANCO BOGOTA
0,0002899	0,0003485	0,000202	5,30E-04	0,000278	0,00043	0,00036	0,00022483

La tabla 47 corresponde a la matriz de varianza covarianza condicional estimada para el año siguiente.

Tabla 47 Matriz de varianza covarianza condicional

Matriz de varianza-covarianza condicional								
	BANCOLOMBIA	GRUPOSURA	NUTRESA	ISA	GRUPOARGOS	GRUPO AVAL	CEMENTOS ARGOS	BANCO BOGOTA
<b>BANCOLOMBIA</b>	0,0002899	0,000147551	9,19613E-05	5,9609E-05	0,000112324	0,000116918	0,000111517	7,54951E-05
<b>GRUPOSURA</b>	0,000147551	0,0003485	0,000172687	2,56581E-05	0,000168269	0,000173227	0,000210971	0,000164428
<b>NUTRESA</b>	9,19613E-05	0,000172687	0,000202	-5,11416E-07	9,82155E-05	0,000137888	0,000148152	0,000134471
<b>ISA</b>	5,9609E-05	2,56581E-05	-5,11416E-07	0,00053	0,000116183	5,24227E-06	-7,49902E-06	-5,10139E-05
<b>GRUPOARGOS</b>	0,000112324	0,000168269	9,82155E-05	0,000116183	0,000278	0,00010065	0,00013157	7,46205E-05
<b>GRUPO AVAL</b>	0,000116918	0,000173227	0,000137888	5,24227E-06	0,00010065	0,00043	0,000147384	0,000146185
<b>CEMENTOS ARGOS</b>	0,000111517	0,000210971	0,000148152	-7,49902E-06	0,00013157	0,000147384	0,00036	0,000145675
<b>BANCO BOGOTA</b>	7,54951E-05	0,000164428	0,000134471	-5,10139E-05	7,46205E-05	0,000146185	0,000145675	0,00022483

Para el cálculo de la frontera eficiente siguiendo la metodología de los modelos ARCH-GARCH se usan los promedios históricos tabla 1 y la matriz de varianza covarianza condicional tabla 47.

En la tabla 48 se encuentra la combinación de activos siguiendo dicha metodología.

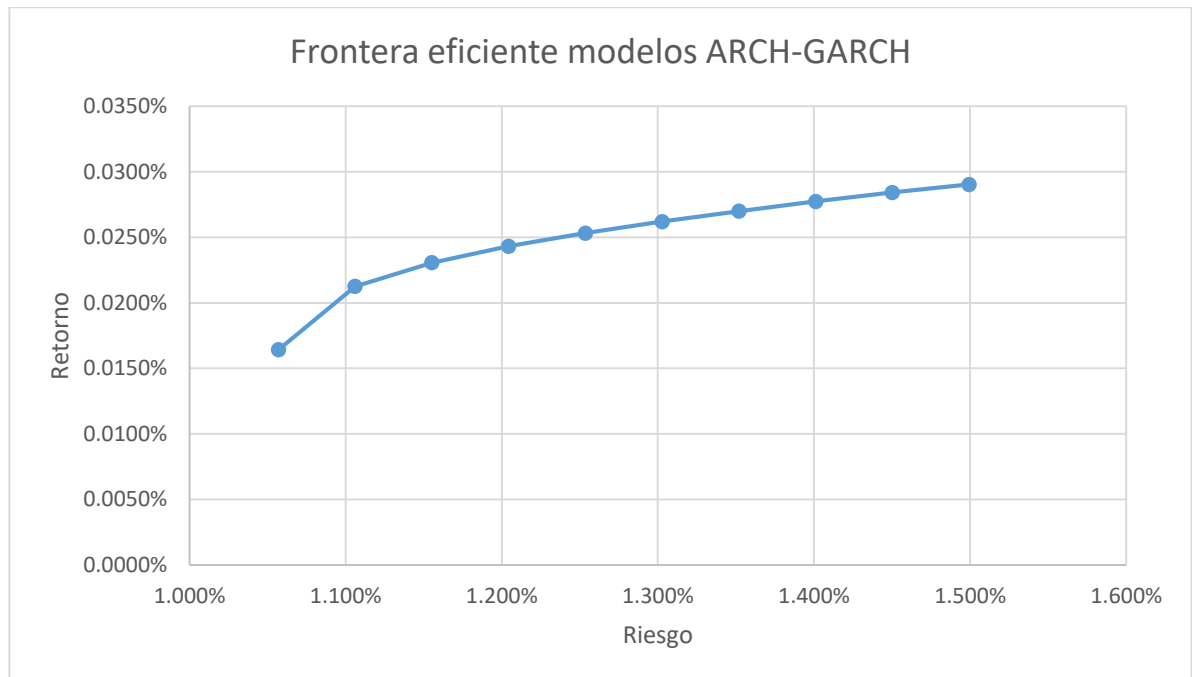
Tabla 48 Portafolio según los modelos ARCH-GARCH

PORTAFOLIO	BANCOLOMBIA	GRUPOSURA	NUTRESA	ISA	GRUPOARGOS	GRUPO AVAL	CEMENTOS ARGOS	BANCO BOGOTA	RIESGO	RETORNO
Mínima varianza	14,83%	0,00%	21,04%	20,73%	8,15%	1,59%	1,61%	32,04%	1,0569%	0,0164%
2	18,12%	0,00%	6,34%	18,31%	0,00%	0,34%	0,00%	56,90%	1,1061%	0,0213%
3	17,47%	0,00%	0,00%	15,10%	0,00%	0,33%	0,00%	67,11%	1,1553%	0,0231%
4	15,47%	0,00%	0,00%	11,28%	0,00%	0,00%	0,00%	73,25%	1,2044%	0,0243%
5	13,76%	0,00%	0,00%	8,16%	0,00%	0,00%	0,00%	78,08%	1,2536%	0,0253%
6	12,24%	0,00%	0,00%	5,44%	0,00%	0,00%	0,00%	82,32%	1,3028%	0,0262%
7	10,92%	0,00%	0,00%	2,94%	0,00%	0,00%	0,00%	86,15%	1,3519%	0,0270%
8	9,63%	0,00%	0,00%	0,63%	0,00%	0,00%	0,00%	89,74%	1,4011%	0,0277%
9	5,18%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	94,82%	1,4503%	0,0284%
Máximo retorno	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	1,4994%	0,0290%



La figura 16 muestra la frontera eficiente para los portafolios de inversión siguiendo la metodología de los modelos ARCH-GARCH.

Figura 16 Frontera eficiente según los modelos ARCH-GARCH



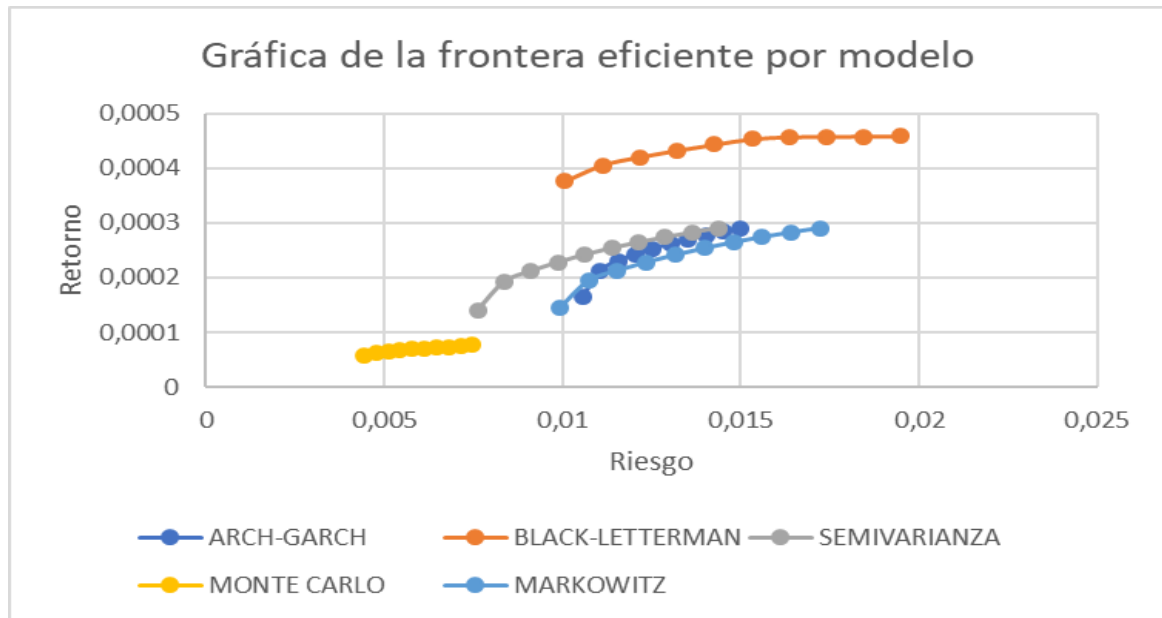
Los portafolios siguiendo esta metodología tiene un riesgo asociado comprendido entre 1.057% con un retorno de 0,0164%, hasta 1,499% con un retorno de 0,0290%.

Una vez construidos los modelos, se puede realizar el análisis comparativo, primero entre los valores esperados por los modelos y segundo con el comportamiento que tuvieron los datos pronosticados contra los datos reales de la base diferenciada.

#### I. Respecto a los valores esperados:

En la figura 17 se encuentra la frontera eficiente resultado de los modelos propuestos.

Figura 17 Frontera eficiente Modelos propuestos



Se aprecia en la figura 17 que el modelo de simulación por Montecarlo arrojó los portafolios más conservadores, mostrando el riesgo y el retorno menor entre los modelos, por otro lado, el modelo de Black-Litterman tiene los portafolios con mayor riesgo con un valor esperado significativamente mayor a los demás modelos. Los demás modelos comparten aproximadamente el mismo valor esperado con leves diferencias en el riesgo.

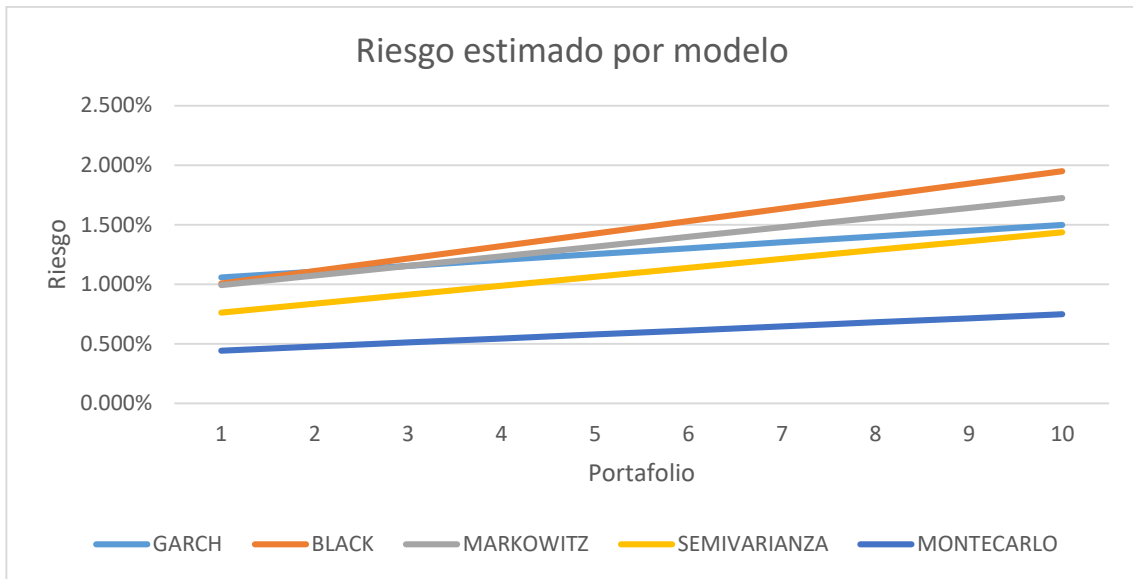
En la tabla 49 está el valor mínimo y máximo del riesgo estimado por modelo indicando nuevamente los modelos más riesgosos y los más conservadores. De menor a mayor tenemos el siguiente orden: Simulación por Montecarlo, el modelo de Semivarianza, los modelos Arch-Garch, el modelo de Markowitz y por último el modelo de Black-Litterman.

Tabla 49 Valores mínimo y máximo para el riesgo pronosticado en cada modelo

Modelo	GARCH	BLACK	MONTECARLO	SEMIVARIANZA	MARKOWITZ
<b>Riesgo mínimo</b>	1,06%	1,01%	0,44%	0,76%	0,99%
<b>Riesgo máximo</b>	1,50%	1,95%	0,75%	1,44%	1,72%

En la figura 17 está el riesgo estimado por los modelos.

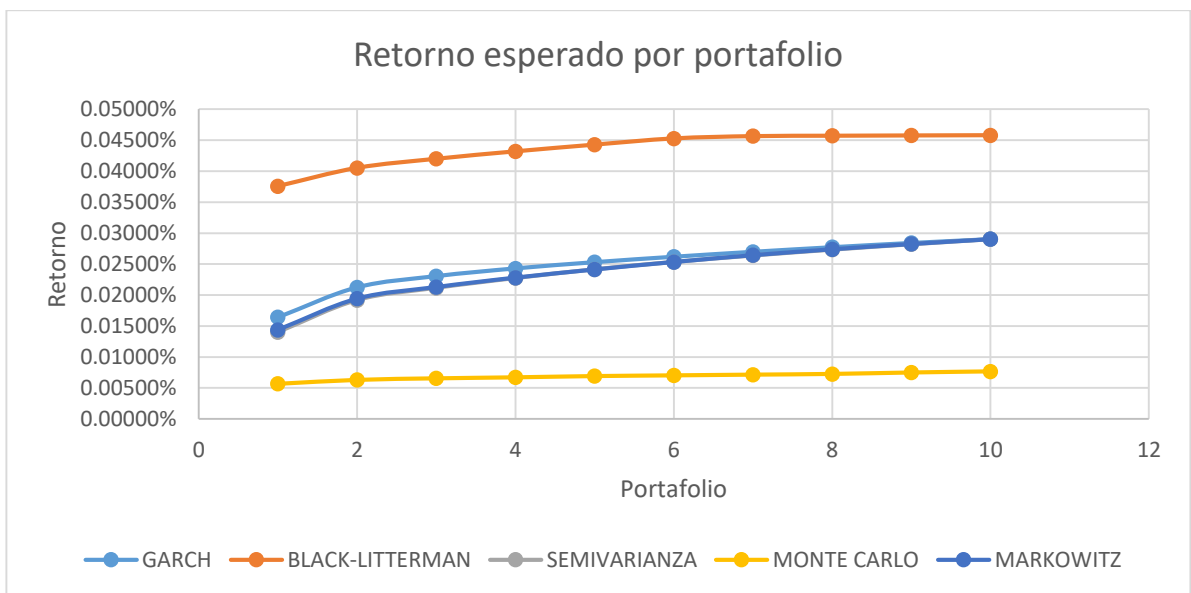
Figura 18 Riesgo estimado por modelo



Esta es la representación gráfica de lo encontrado en la tabla 49 y se percibe como cambia el retorno esperado a medida que aumenta el riesgo.

En la siguiente figura está el retorno esperado por cada portafolio y por cada modelo.

Figura 19 Retorno esperado por portafolio



Se ve que el valor esperado más bajo lo proporciona el modelo de simulación por Montecarlo, el más alto el modelo de Black-Litterman, los otros tres modelos tienen casi el mismo valor esperado.

## II. Comportamiento de los modelos, aplicados sobre la base de datos comprendida entre 4/07/2017 hasta 29/06/2018.

A continuación, se encuentra el valor estimado del retorno anual según el modelo y activo contra el valor del retorno real, tabla 50.

*Tabla 50 Retorno estimado versus Retorno real*

Acción	Retorno estimado versus retorno real anual por modelo					Retorno real
	Arch-Garch	Black-Litterman	Semivarianza	Monte Carlo	Markowitz	
<b>BANCOLOMBIA</b>	4,21%	9,26%	4,21%	1,83%	4,21%	11,19%
<b>GRUPOSURA</b>	4,10%	11,18%	4,10%	1,78%	4,10%	-4,98%
<b>NUTRESA</b>	3,58%	9,80%	3,58%	1,56%	3,58%	2,25%
<b>ISA</b>	0,82%	8,46%	0,82%	0,36%	0,82%	7,89%
<b>GRUPOARGOS</b>	1,29%	11,08%	1,29%	0,56%	1,29%	-5,49%
<b>GRUPO AVAL</b>	4,50%	9,10%	4,50%	1,11%	4,50%	-3,65%
<b>CEMENTOS ARGOS</b>	0,65%	10,85%	0,65%	0,28%	0,65%	-18,91%
<b>BANCO BOGOTA</b>	7,08%	9,46%	7,08%	3,08%	7,08%	8,84%

Se aprecia en la tabla 50 que las acciones de Grupo Sura, Grupo Argos, Grupo Aval y Cementos Argos tuvieron un desempeño negativo mientras que las demás acciones tuvieron rendimientos positivos en su mayoría superior al valor estimado por los modelos.

Con el ánimo de comparar el desempeño de los portafolios se simula una inversión de “X” cantidad de dinero para calcular cuál fue el rendimiento real de cada portafolio por modelo, comparándola además con la tasa libre de riesgo ( $R_f$ ). En la tabla 51 se encuentra dichos rendimientos.

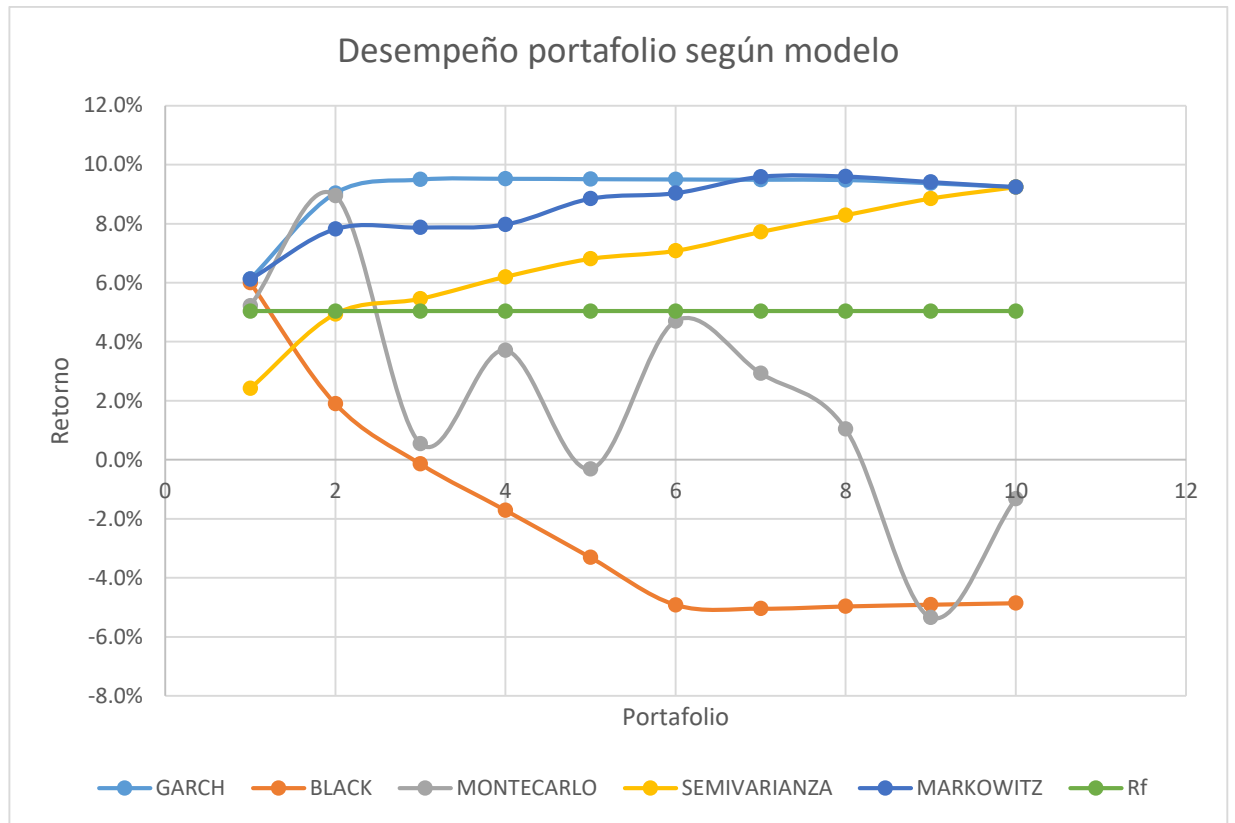
Tabla 51 Comportamiento de los portafolios por modelo

Portafolio	GARCH	BLACK	MONTECARLO	SEMIVARIANZA	MARKOWITZ	Rf
1	6,13%	6,01%	5,22%	2,42%	6,12%	5,04%
2	9,04%	1,90%	8,95%	4,94%	7,82%	5,04%
3	9,50%	-0,14%	0,55%	5,46%	7,87%	5,04%
4	9,53%	-1,71%	3,71%	6,20%	7,98%	5,04%
5	9,51%	-3,31%	-0,31%	6,81%	8,85%	5,04%
6	9,50%	-4,91%	4,70%	7,08%	9,04%	5,04%
7	9,49%	-5,04%	2,93%	7,72%	9,59%	5,04%
8	9,48%	-4,97%	1,05%	8,29%	9,60%	5,04%
9	9,38%	-4,91%	-5,34%	8,85%	9,41%	5,04%
10	9,24%	-4,86%	-1,32%	9,24%	9,24%	5,04%

Se ve en la tabla 51 como el inversionista se ve recompensado por aumentar el riesgo en los modelos Arch-Garch, Semivarianza y Markowitz, mientras que en el modelo de Black-Litterman aumentó la pérdida a medida que aumenta el riesgo, para el modelo de Montecarlo no necesariamente un incremento en el riesgo implica un aumento en el rendimiento esperado.

En la figura 20 se encuentra el comportamiento de los retornos en los diez portafolios de inversión que fueron desarrollados para cada modelo, donde el primer portafolio corresponde al de mínima varianza y el décimo corresponde al de máxima varianza, además de la tasa libre de riesgo (Rf), que es lo mínimo que esperaríamos rentar un inversionista si colocara todo el dinero en dicha tasa.

Figura 20 Comportamiento de los portafolios según modelo



Se puede observar en la figura 20 como los modelos ARCH-GARCH y Markowitz ofrecen un retorno superior a  $R_f$  en todos los portafolios, en el modelo de semivarianza se tiene un retorno superior a  $R_f$  a partir del tercer portafolio, en el modelo de Montecarlo se obtiene un rendimiento superior a  $R_f$  solamente en los dos primeros portafolios y para el caso del modelo de Black-Litterman solamente el primer portafolio muestra rendimientos superiores a  $R_f$ . Para los modelos ARCH-GARCH, semivarianza y Markowitz el retorno se ve recompensado por un aumento en el riesgo, es decir, mayor varianza implica mayores rendimientos, en tanto que para el modelo Montecarlo el aumento en el riesgo no tiene ninguna incidencia sobre el aumento o disminución de los retornos, para el modelo Black-Litterman se cumple que a mayor riesgo mayor es la pérdida de capital.

En la tabla 52, están los valores mínimo y máximo retorno esperado por modelo, y el mínimo y máximo retorno real.

*Tabla 52* Valores esperados de los retornos para el mínimo y máximo riesgo vs Valores reales

Modelo	Retorno mínimo esperado	Retorno máximo esperado	Retorno real mínima varianza	Retorno real máxima varianza
<b>GARCH</b>	4,01%	7,08%	6,127%	9,241%
<b>BLACK</b>	9,17%	11,18%	6,006%	-4,858%
<b>MONTECARLO</b>	1,39%	1,87%	5,220%	-1,321%
<b>SEMIVARIANZA</b>	3,42%	7,08%	5,784%	9,241%
<b>MARKOWITZ</b>	1,39%	1,87%	6,117%	9,241%

En la tabla 52 se ve como en los modelos Garch, Semivarianza y Markowitz el retorno real entre mínima y máxima varianza se incrementa como compensación al asumir un mayor nivel de riesgo, además los retornos reales en los tres modelos presentan niveles mayores a los pronosticados, por el otro lado, los modelos Black-Litterman y Montecarlo presentan retornos negativos al incrementar la varianza.

En la tabla 53 está el retorno máximo real y el correspondiente número de portafolio.

*Tabla 53* Portafolio con máximo retorno real en cada modelo

Modelo	Retorno máximo real	Número de portafolio
<b>GARCH</b>	9,527%	4
<b>BLACK</b>	6,006%	1
<b>MONTECARLO</b>	8,953%	2
<b>SEMIVARIANZA</b>	9,751%	7
<b>MARKOWITZ</b>	9,602%	8

Se recuerda que los portafolios están dispuestos desde el número uno hasta el diez ordenados de menor a mayor varianza. Ninguno de los portafolios presenta un comportamiento exactamente como se esperaría, donde se aumenta el retorno al incrementar la varianza, es decir, se esperaría que el mayor retorno se presente en el portafolio diez. Los modelos Semivarianza y Markowitz tienen los mayores retornos en portafolios de mayor riesgo, en el modelo Garch se tiene el máximo incremento en el portafolio 4 y después de este disminuye, aunque no de manera

significativa como se aprecia en la tabla 53. En los modelos Black-Litterman y Montecarlo se presenta el máximo retorno solo en los primeros portafolios.



## 6. CONCLUSIONES

En la literatura revisada con respecto al modelo de Semivarianza se puede generalizar que expresa mejor el cálculo del riesgo y su retorno esperado ya que se enfatiza solo en los movimientos negativos. Se evidencia su sensibilidad al disminuirse o aumentarse la tasa libre de riesgo. Los activos de tamaño menor presentan una mayor rentabilidad promedio y viceversa y se resalta el hecho de contar con procesadores tan veloces y paquetes Opquest ya que simplifica el trabajo de manera significativa obteniendo una valoración más precisa de las acciones y por lo tanto es una herramienta de confiar en la toma de decisiones.

Con respecto al modelo de Montecarlo, la literatura afirma que el complemento de Excel, Crystall Ball permite tener en cuenta la volatilidad de las variables al incluir en su análisis las diferentes formas de distribución, generando simulaciones estocásticas. Al realizar el comparativo, en el modelo de Markowitz se encuentra un mayor rendimiento sin embargo el modelo de Montecarlo por usar distribuciones de probabilidad muestra escenarios que se asemejan más a la realidad. Se deduce que la cartera con máxima rentabilidad actualizada no tiene porqué ser la que tenga un nivel mínimo de riesgo. Es decir que el inversor puede incrementar su rentabilidad esperada asumiendo una diferencia extra de riesgo.

A partir de la información obtenida respecto a los retornos esperados y su riesgo asociado podemos ver como el modelo de heterocedasticidad autorregresiva (Arch-Garch) complementa el modelo propuesto por Markowitz, generando portafolios todos ellos con retornos reales superiores a la tasa libre de riesgo y bajo un riesgo entre moderado y bajo, indicando el importante impacto que tiene la varianza condicional en la construcción de portafolios de inversión para el caso colombiano.

En el trabajo realizado por (Urzúa, 2012) la matriz de varianza condicional produjo mejores resultados, ejerciendo cierto grado de protección ante el riesgo, evitando pérdidas superiores a las del mercado en el caso de que las hubiere, resultado

consistente con los obtenidos en este trabajo de investigación, donde el riesgo resultó ser moderado comparado con los otros modelos estudiados.

Del mismo modo los resultados obtenidos con los modelos Garch se alinean con los obtenidos por (Rojas' & Palacios, 2004) donde se realizó el pronóstico de la volatilidad de la acción de Atacocha para un periodo fuera de muestra, concluyendo que el modelo ARMA(0,2) – GARCH(2,2) tuvo mejor resultado, evidenciando la pertinencia de los modelos Arch-Garch ante la presencia de heteroscedasticidad de los retornos.

Respecto al impacto del modelo de Black-Litterman sobre el modelo de Markowitz en la conformación de portafolios de inversión en renta variable para el caso colombiano, no se obtuvieron los resultados esperados, donde se pretendía subsanar uno de los inconvenientes que presenta el modelo de Markowitz al no incluir la percepción del inversor buscando robustecer la conformación de portafolios. Contrario a lo encontrado por (Salazar & Clement, 2014), (Ramírez & Jaramillo, 2015), (Luis Franco Arbeláez, 2011), (Cárdenas, y otros, 2015) el modelo de Black-Litterman tuvo el peor comportamiento de los cinco modelos estudiados, donde solo el primer portafolio tuvo rendimientos superiores a  $R_f$ , a partir del segundo portafolio los retornos fueron inferiores a  $R_f$  y desde el tercer portafolio se obtuvieron retornos negativos. Dichos resultados no están en contra vía de la teoría, ni de su aplicabilidad en el caso colombiano, lo que indican los resultados es la importancia del buen manejo de la percepción del inversor, que en nuestro caso solo se tuvo en cuenta la de un experto, percepción que estuvo la mayor parte del tiempo en contra de la tendencia del mercado y de ahí los resultados. Con la intención de mejorar el comportamiento del modelo se sugiere seguir la propuesta hechas por (Silva, Pinheiro, & Poggi, 2017) donde se plantea un modelo que permite contrarrestar el impacto negativo de una vista pobre sobre el comportamiento a futuro de las acciones, como también realizar calibraciones periódicas en los portafolios acorde con el movimiento del mercado.

A pesar de que los promedios de los retornos de todas las acciones eran positivos, las acciones de Grupo Sura, Grupo Argos, Grupo Aval y Cementos Argos presentaron una caída en el valor de la acción durante el periodo de evaluación, en tanto que las demás acciones si mantuvieron los retornos positivos, evidenciando la importancia de la diversificación en la construcción de portafolios que permitan contrarrestar el impacto de los movimientos a la baja en el precio.

Con referencia al modelo de Semivarianza, el inversor se beneficia por el aumento del riesgo. Mientras que en la simulación por Montecarlo un aumento en el riesgo no siempre implica un aumento en el rendimiento esperado, esto debido a la aleatoriedad del método (Tabla 48).

Los dos primeros portafolios propuestos en el modelo de Semivarianza tuvieron rendimientos inferiores a la tasa libre de riesgo, los rendimientos de los otros ocho portafolios fueron superiores. Caso contrario a lo sucedido con la simulación por Montecarlo ya que los rendimientos esperados en los dos primeros portafolios fueron superiores a la tasa libre de riesgo y a partir del tercer portafolio, rendimientos esperados inferiores. Esto se puede evidenciar en los resultados de la Figura 7.

Respecto de los modelos Arch-Garch se observa como todos los portafolios propuestos tuvieron rendimientos superiores a la tasa libre de riesgo, figura 7, además acorde con la teoría, el rendimiento aumentó en la medida que se incrementó el riesgo o la desviación estándar del portafolio.

La estimación de la volatilidad de las series a través de los modelos Arch en su mayoría fueron suficientes con modelos GARCH(1,1) tal y como lo sugieren (Tim Bollerslev Ray Y. Chou Kenneth F., 1992).

Comparando los retornos entre los cinco modelos trabajados, los modelos Arch-Garch obtuvieron en términos generales el mejor desempeño, generando retornos desde el 6,13% correspondiente al portafolio de mínima varianza, hasta el 9,24% correspondiente al portafolio de máximo retorno y máximo riesgo.

Sobre el modelo de Black-Litterman solamente el portafolio uno de mínima varianza tuvo retorno superior a la tasa libre de riesgo el 6,01%, el portafolio dos tuvo un rendimiento inferior del 1,9%, y los demás portafolios presentaron retornos reales negativos, incrementando la pérdida al aumentar la desviación estándar, hasta alcanzar el -4,86%.

El desempeño adverso del modelo de Black-Litterman se debió al movimiento a la baja del precio de la acción del Grupo Sura y Grupo Argos, acciones que según las expectativas del experto inversor tendrían un comportamiento al alza.

Con el ánimo de revertir el desempeño adverso de los portafolios a través del modelo de Black-Litterman se sugiere hacer una calibración de las vistas cada tanto tiempo acorde al movimiento financiero, además de hacer un conceso entre varios puntos de vista de expertos.

En el modelo de Markowitz, se evidenció un buen desempeño, ofreciendo retornos todos superiores a la tasa libre de riesgo, desde 6,12% para el portafolio de mínima varianza, hasta el 9,24% para el portafolio de máximo retorno.

En los modelos Arch-Garch como en el de Markowitz se castiga la diversificación en aras de un aumento en el retorno, invirtiendo el 100% en las acciones del Banco de Bogotá.

El modelo de Semivarianza presenta una alternativa más conservadora al momento de realizar una inversión en acciones por presentar un riesgo o varianza menor con retornos por encima de la tasa libre de riesgo a partir del segundo portafolio frente a los demás modelos, además de incrementar el retorno al incrementar el riesgo, el modelo más agresivo que produce resultados esperados es el de Markowitz por presentar mayor varianza con retornos superiores a la tasa libre de riesgo.

En los modelos Garch, Semivarianza y Markowitz el retorno real entre mínima y máxima varianza se incrementa como compensación al asumir un mayor nivel de riesgo, además los retornos reales en los tres modelos presentan niveles mayores

a los pronosticados, por el otro lado, los modelos Black-Litterman y Montecarlo presentan retornos negativos al incrementar la varianza.

Ninguno de los portafolios presenta un comportamiento exactamente como se esperaría, donde se aumenta el retorno al incrementar la varianza, es decir, se esperaría que el mayor retorno se presente en el portafolio con mayor riesgo.

Los modelos Semivarianza y Markowitz tienen los mayores retornos en portafolios de mayor riesgo y en el modelo Garch se tiene el máximo incremento en el portafolio de riesgo intermedio después del cual disminuye, aunque no de manera significativa y siempre con niveles superiores a la tasa libre de riesgo.

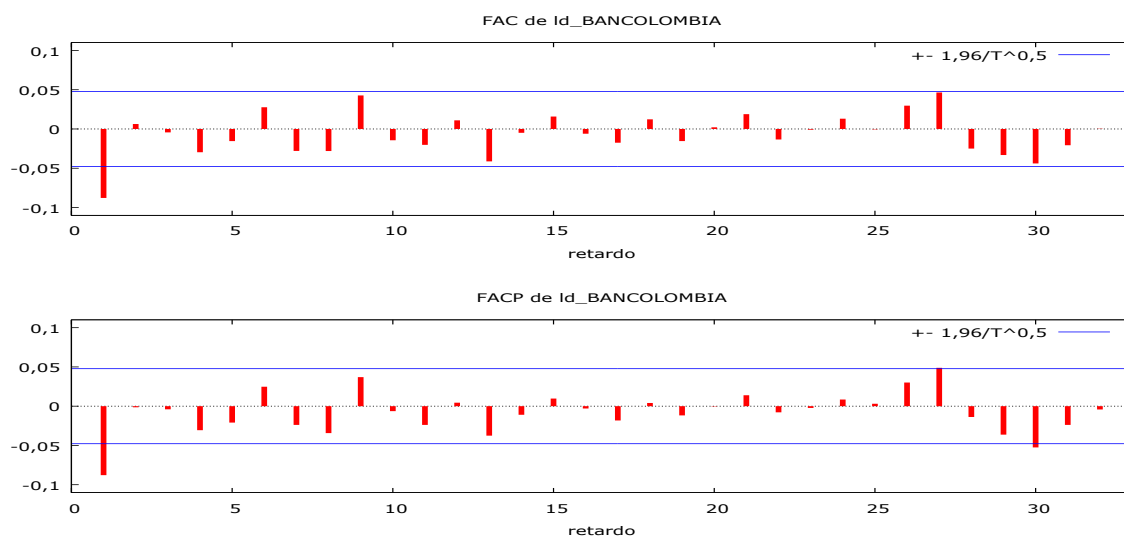
El modelo que mostró el mayor retorno real es el de Semivarianza con un valor de 9,751% correspondiente al portafolio número siete con un riesgo de 1,212%.

Según lo mostrado por los diferentes modelos respecto al riesgo y su relación con el retorno real proporcionado, se tiene que los modelos Arch-Garch presentan mejores características como modelo de inversión sobre los datos y tiempo estudiados.

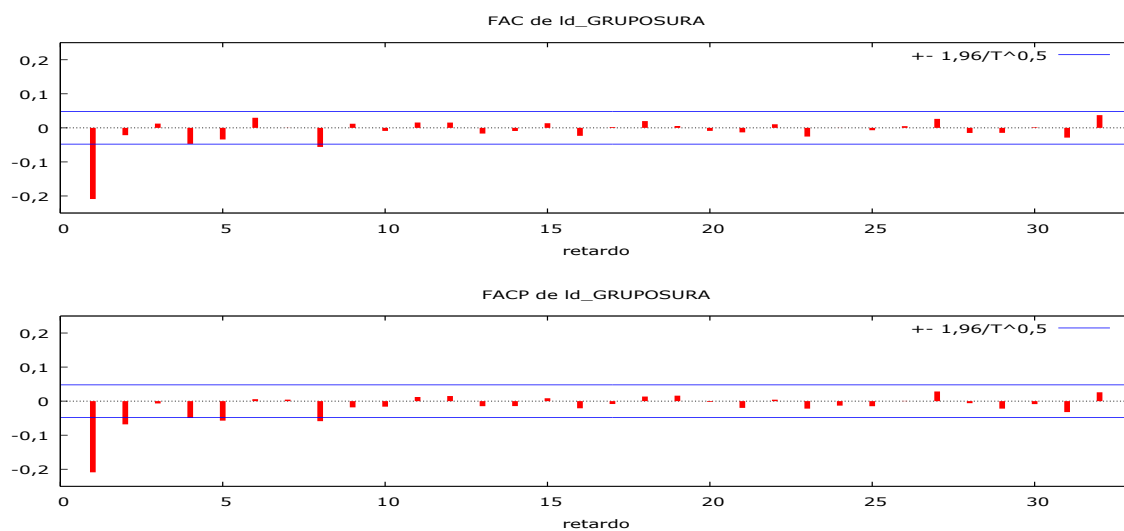
## ANEXOS

### Función de autocorrelación y autocorrelación parcial

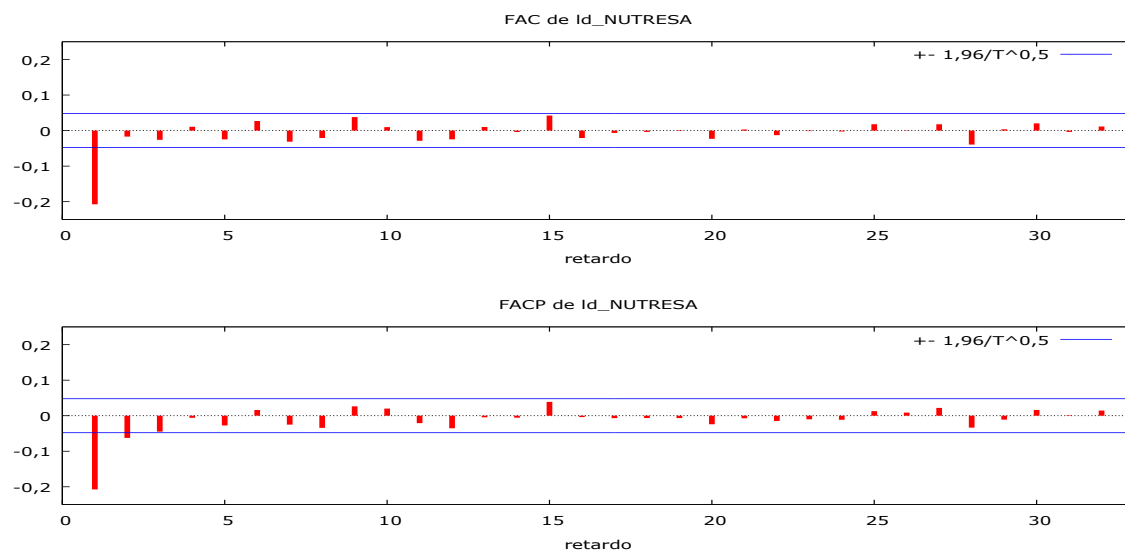
#### Anexo 1 Función de autocorrelación y autocorrelación parcial Bancolombia



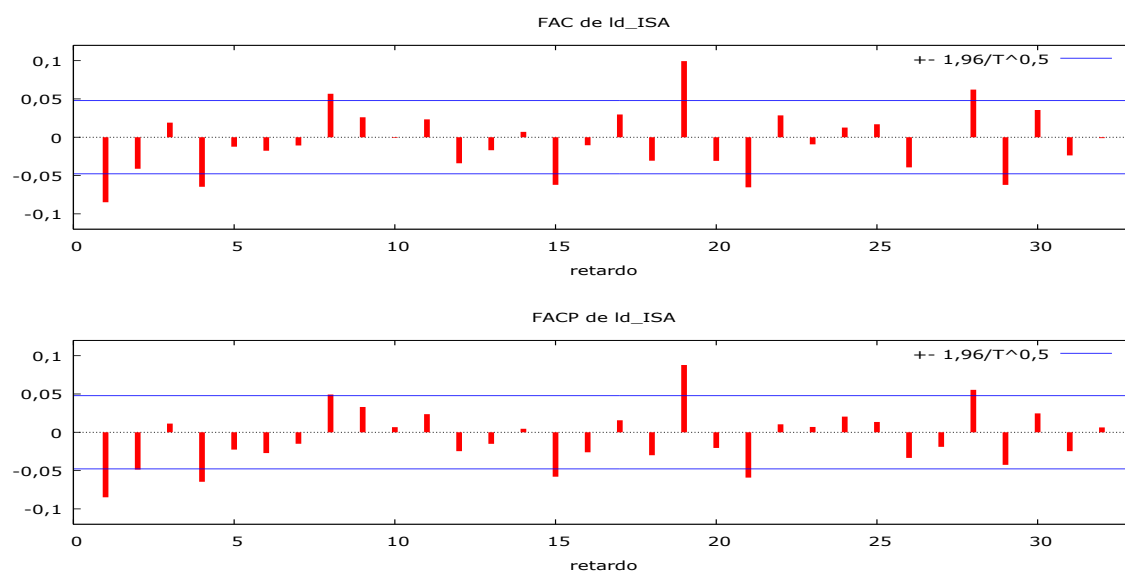
#### Anexo 2 Función de autocorrelación y autocorrelación parcial GrupoSura



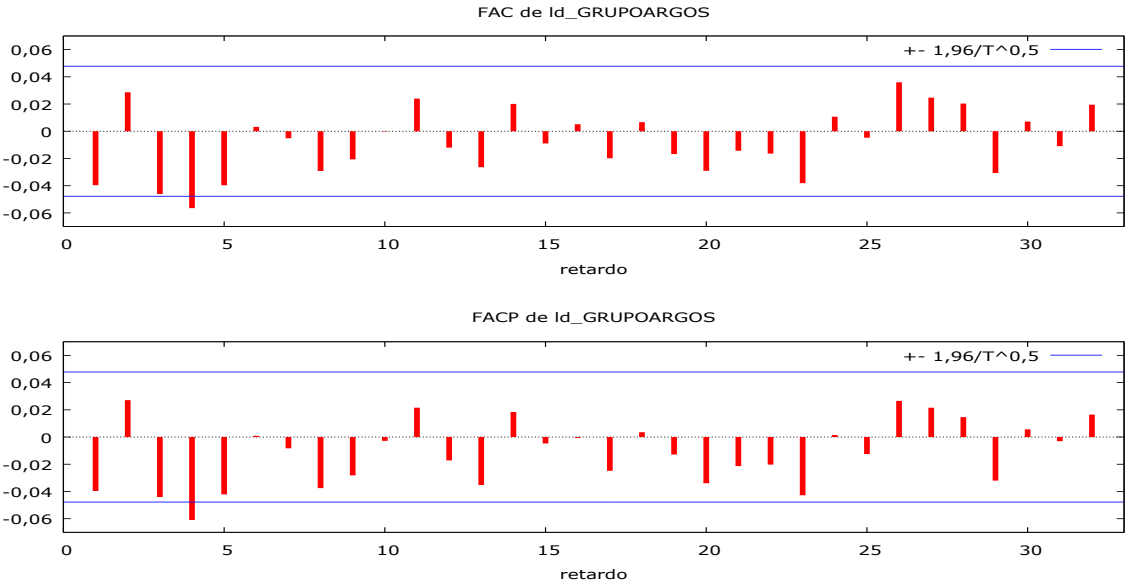
### Anexo 3 Función de autocorrelación y autocorrelación parcial Nutresa



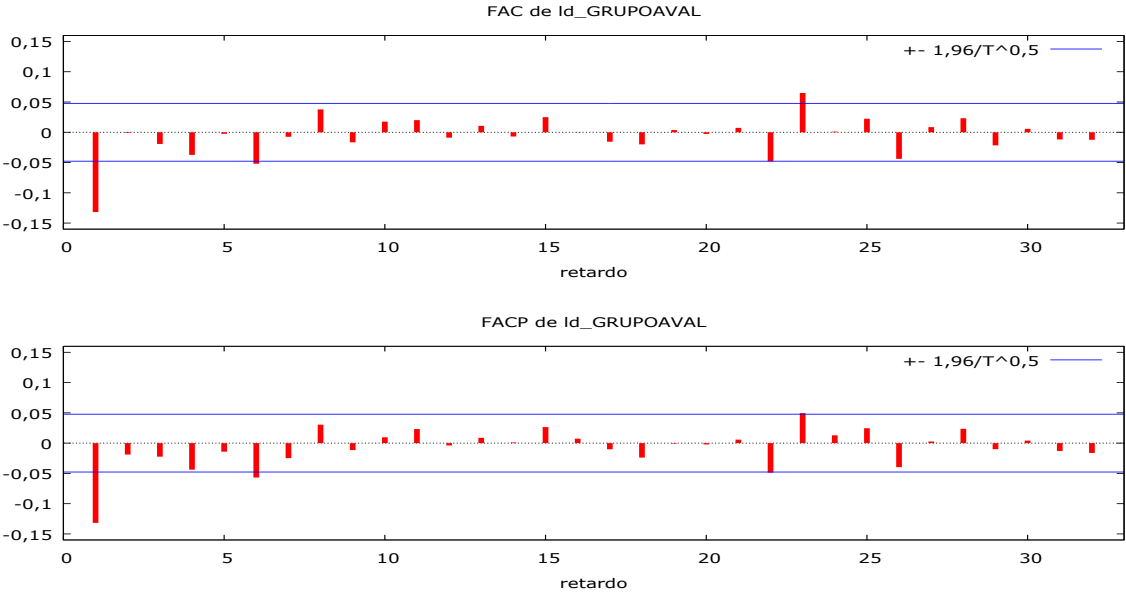
### Anexo 4 Función de autocorrelación y autocorrelación parcial Isa



Anexo 5 Función de autocorrelación y autocorrelación parcial GrupoArgos

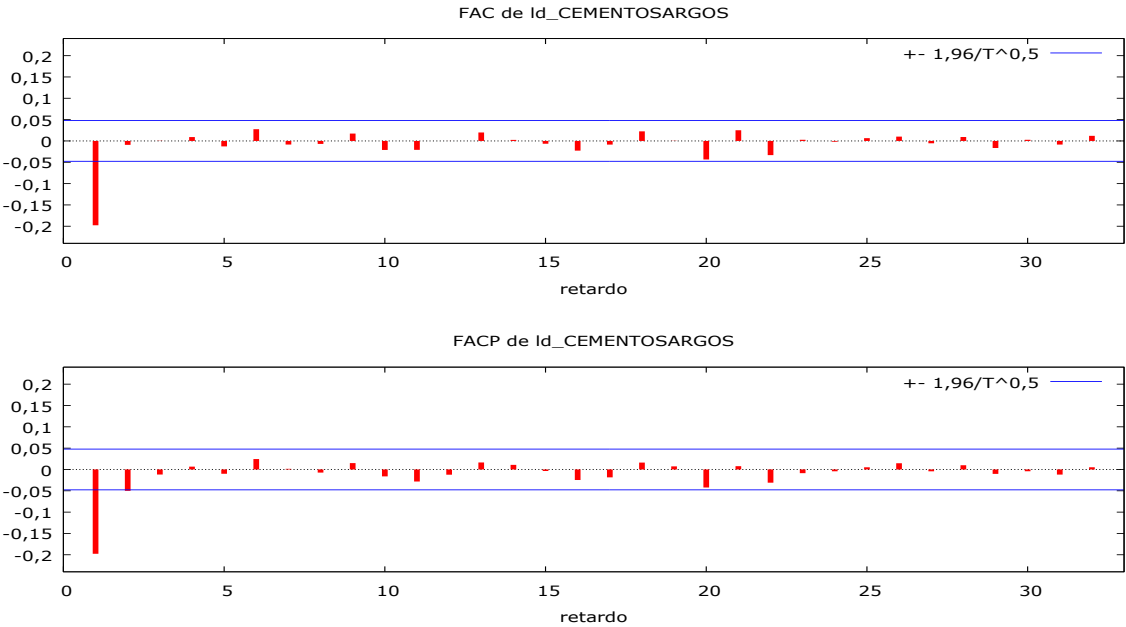


Anexo 6 Función de autocorrelación y autocorrelación parcial Grupo Aval

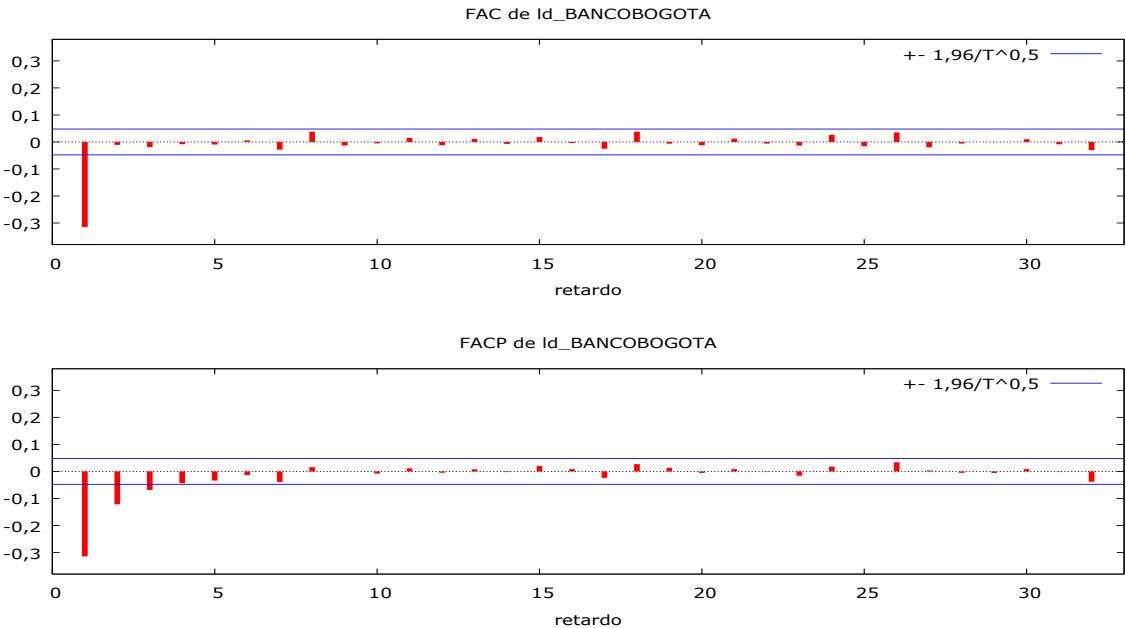




Anexo 7 Función de autocorrelación y autocorrelación parcial Cementos Argos



Anexo 8 Función de autocorrelación y autocorrelación parcial Banco de Bogotá



## Estimación de los modelos ARMA

### Anexo 9 Modelo ARMA(1,0) Bancolombia

Dependent Variable: DLBANCOLOMBIA				
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)				
Date: 07/11/18 Time: 09:23				
Sample: 7/02/2010 6/29/2017				
Included observations: 1682				
Convergence achieved after 18 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.087910	0.014387	-6.110508	0.0000
SIGMASQ	0.000234	4.55E-06	51.45037	0.0000
R-squared	0.007618	Mean dependent var		0.000167
Adjusted R-squared	0.007027	S.D. dependent var		0.015368
S.E. of regression	0.015314	Akaike info criterion		-5.518951
Sum squared resid	0.393973	Schwarz criterion		-5.512497
Log likelihood	4643.438	Hannan-Quinn criter.		-5.516560
Durbin-Watson stat	2.000096			
Inverted AR Roots	-.09			

### Anexo 10 Modelo ARMA(1,0) GrupoSura

Dependent Variable: DLGRUPOSURA				
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)				
Date: 07/16/18 Time: 19:54				
Sample: 7/02/2010 6/30/2017				
Included observations: 1683				
Convergence not achieved after 500 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.165970	0.062809	2.642470	0.0083
MA(1)	-0.389460	0.063309	-6.151725	0.0000
SIGMASQ	0.000354	1.77E-06	200.0878	0.0000
R-squared	0.048828	Mean dependent var		0.000168
Adjusted R-squared	0.047696	S.D. dependent var		0.019301
S.E. of regression	0.018835	Akaike info criterion		-5.104332
Sum squared resid	0.596023	Schwarz criterion		-5.094656
Log likelihood	4298.296	Hannan-Quinn criter.		-5.100748
Durbin-Watson stat	2.004000			
Inverted AR Roots	.17			
Inverted MA Roots	.39			

Anexo 11 Modelo ARMA(1,1) Nutresa

Dependent Variable: DLNUTRESA				
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)				
Date: 07/16/18 Time: 20:25				
Sample: 7/02/2010 6/30/2017				
Included observations: 1683				
Convergence not achieved after 500 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.155248	0.063003	2.464138	0.0138
MA(1)	-0.377878	0.062760	-6.020956	0.0000
SIGMASQ	0.000246	1.20E-06	204.8763	0.0000
R-squared	0.048302	Mean dependent var		0.000147
Adjusted R-squared	0.047169	S.D. dependent var		0.016097
S.E. of regression	0.015713	Akaike info criterion		-5.466836
Sum squared resid	0.414792	Schwarz criterion		-5.457160
Log likelihood	4603.342	Hannan-Quinn criter.		-5.463252
Durbin-Watson stat	2.002660			
Inverted AR Roots	.16			
Inverted MA Roots	.38			

Anexo 12 Modelo ARMA(1,1) Isa

Dependent Variable: DLISA				
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)				
Date: 07/12/18 Time: 09:35				
Sample: 7/02/2010 6/30/2017				
Included observations: 1683				
Convergence achieved after 56 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.531699	0.089612	5.933319	0.0000
MA(1)	-0.618540	0.086198	-7.175810	0.0000
SIGMASQ	0.000286	3.79E-06	75.38708	0.0000
R-squared	0.010416	Mean dependent var		3.38E-05
Adjusted R-squared	0.009238	S.D. dependent var		0.016997
S.E. of regression	0.016919	Akaike info criterion		-5.319026
Sum squared resid	0.480876	Schwarz criterion		-5.309350
Log likelihood	4478.961	Hannan-Quinn criter.		-5.315442
Durbin-Watson stat	2.007621			
Inverted AR Roots	.53			
Inverted MA Roots	.62			

Anexo 13 Modelo ARMA(5,0) Grupo Argos

Dependent Variable: DLGRUPOARGOS					
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)					
Date: 07/16/18 Time: 16:20					
Sample: 7/02/2010 6/30/2017					
Included observations: 1683					
Convergence achieved after 18 iterations					
Coefficient covariance computed using outer product of gradients					
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.	
AR(1)	-0.043581	0.014390	-3.028585	0.0025	
AR(3)	-0.046026	0.022631	-2.033744	0.0421	
AR(4)	-0.061915	0.023126	-2.677274	0.0075	
AR(5)	-0.043176	0.019818	-2.178618	0.0295	
SIGMASQ	0.000270	5.07E-06	53.23809	0.0000	
R-squared	0.009067	Mean dependent var		5.27E-05	
Adjusted R-squared	0.006705	S.D. dependent var		0.016514	
S.E. of regression	0.016459	Akaike info criterion		-5.372918	
Sum squared resid	0.454562	Schwarz criterion		-5.356791	
Log likelihood	4526.310	Hannan-Quinn criter.		-5.366944	
Durbin-Watson stat	1.997586				
Inverted AR Roots	.44-.41i -.48	.44+.41i	-.22+.44i	-.22-.44i	

Anexo 14 Modelo ARMA(1,0) Grupo Aval

Dependent Variable: DLAVAL				
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)				
Date: 07/16/18 Time: 15:55				
Sample: 7/02/2010 6/30/2017				
Included observations: 1683				
Convergence achieved after 126 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.135758	0.007601	-17.86137	0.0000
SIGMASQ	0.000265	2.58E-06	102.6805	0.0000
R-squared	0.017678	Mean dependent var		0.000185
Adjusted R-squared	0.017093	S.D. dependent var		0.016420
S.E. of regression	0.016279	Akaike info criterion		-5.396685
Sum squared resid	0.445474	Schwarz criterion		-5.390234
Log likelihood	4543.310	Hannan-Quinn criter.		-5.394296
Durbin-Watson stat	1.997323			
Inverted MA Roots	.14			

Anexo 15 Modelo ARMA(0,1) Cementos Argos

Dependent Variable: DLCEMENTOS				
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)				
Date: 07/16/18 Time: 15:16				
Sample: 7/02/2010 6/30/2017				
Included observations: 1683				
Convergence achieved after 365 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.209793	0.003736	-56.15916	0.0000
SIGMASQ	0.000631	2.37E-06	265.6713	0.0000
R-squared	0.041529	Mean dependent var		2.67E-05
Adjusted R-squared	0.040959	S.D. dependent var		0.025656
S.E. of regression	0.025125	Akaike info criterion		-4.528657
Sum squared resid	1.061195	Schwarz criterion		-4.522206
Log likelihood	3812.865	Hannan-Quinn criter.		-4.526268
Durbin-Watson stat	1.996728			
Inverted MA Roots	.21			

Anexo 16 Modelo ARMA(1,1) Banco de Bogotá

Dependent Variable: DLBBOGOTA				
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)				
Date: 08/27/18 Time: 17:25				
Sample: 7/02/2010 6/29/2017				
Included observations: 1682				
Convergence not achieved after 500 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.109174	0.023258	4.694061	0.0000
MA(1)	-0.472514	0.023700	-19.93713	0.0000
SIGMASQ	0.000262	1.02E-06	255.6694	0.0000
R-squared	0.117710	Mean dependent var		0.000283
Adjusted R-squared	0.116659	S.D. dependent var		0.017236
S.E. of regression	0.016199	Akaike info criterion		-5.405820
Sum squared resid	0.440599	Schwarz criterion		-5.396139
Log likelihood	4549.295	Hannan-Quinn criter.		-5.402234
Durbin-Watson stat	2.003362			
Inverted AR Roots	.11			
Inverted MA Roots	.47			

## Identificación de los parámetros de los modelos GARCH

### Anexo 17 Modelo EGARCH(1,3) Bancolombia

Sample (adjusted): 7/02/2010 6/29/2017  
 Included observations: 1682 after adjustments  
 Convergence achieved after 88 iterations  
 Coefficient covariance computed using outer product of gradients  
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
 $\text{LOG}(\text{GARCH}) = \text{C}(2) + \text{C}(3) * \text{ABS}(\text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)}) + \text{C}(4) * \text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)} + \text{C}(5) * \text{LOG}(\text{GARCH}(-1)) + \text{C}(6) * \text{LOG}(\text{GARCH}(-2)) + \text{C}(7) * \text{LOG}(\text{GARCH}(-3))$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.081731	0.025475	-3.208289	0.0013
Variance Equation				
C(2)	-0.735027	0.119016	-6.175888	0.0000
C(3)	0.313890	0.024331	12.90096	0.0000
C(4)	-0.087346	0.015886	-5.498282	0.0000
C(5)	0.435211	0.049123	8.859668	0.0000
C(6)	-0.142547	0.056141	-2.539110	0.0111
C(7)	0.647848	0.053214	12.17450	0.0000
R-squared	0.007579	Mean dependent var	0.000167	
Adjusted R-squared	0.007579	S.D. dependent var	0.015368	
S.E. of regression	0.015309	Akaike info criterion	-5.652738	
Sum squared resid	0.393989	Schwarz criterion	-5.630150	
Log likelihood	4760.953	Hannan-Quinn criter.	-5.644371	
Durbin-Watson stat	2.012442			
Inverted AR Roots	-.08			

### Anexo 18 Modelo GARCH(1,1) Gruposura

Dependent Variable: DLGRUPOSURA  
 Method: ML ARCH - Student's t distribution (BFGS / Marquardt steps)  
 Date: 07/31/18 Time: 16:04  
 Sample (adjusted): 7/02/2010 6/30/2017  
 Included observations: 1683 after adjustments  
 Convergence achieved after 54 iterations  
 Coefficient covariance computed using outer product of gradients  
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
 $\text{GARCH} = \text{C}(3) + \text{C}(4) * \text{RESID}(-1)^2 + \text{C}(5) * \text{GARCH}(-1)$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.843942	0.102918	8.200149	0.0000
MA(1)	-0.872069	0.092459	-9.431931	0.0000
Variance Equation				
C	5.22E-05	1.15E-05	4.541897	0.0000
RESID(-1)^2	0.286027	0.062571	4.571213	0.0000
GARCH(-1)	0.564184	0.058129	9.705785	0.0000
T-DIST. DOF	3.387581	0.296669	11.41873	0.0000
R-squared	0.013435	Mean dependent var	0.000168	
Adjusted R-squared	0.012848	S.D. dependent var	0.019301	
S.E. of regression	0.019177	Akaike info criterion	-5.824242	
Sum squared resid	0.618201	Schwarz criterion	-5.804890	
Log likelihood	4907.100	Hannan-Quinn criter.	-5.817075	
Durbin-Watson stat	2.381252			
Inverted AR Roots	.84			
Inverted MA Roots	.87			



Anexo 19 Modelo GARCH(1,1) Nutresa

Dependent Variable: DLNUTRESA  
Method: ML ARCH - Student's t distribution (BFGS / Marquardt steps)  
Date: 07/31/18 Time: 16:15  
Sample (adjusted): 7/02/2010 6/30/2017  
Included observations: 1683 after adjustments  
Convergence achieved after 45 iterations  
Coefficient covariance computed using outer product of gradients  
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
GARCH = C(3) + C(4)\*RESID(-1)^2 + C(5)\*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.299173	1.300716	-0.230006	0.8181
MA(1)	0.314930	1.293044	0.243557	0.8076
Variance Equation				
C	4.26E-05	8.18E-06	5.210458	0.0000
RESID(-1)^2	0.289537	0.057871	5.003180	0.0000
GARCH(-1)	0.499332	0.064633	7.725621	0.0000
T-DIST. DOF	3.751609	0.327829	11.44378	0.0000
R-squared	-0.006865	Mean dependent var		0.000147
Adjusted R-squared	-0.007464	S.D. dependent var		0.016097
S.E. of regression	0.016157	Akaike info criterion		-6.165691
Sum squared resid	0.438836	Schwarz criterion		-6.146339
Log likelihood	5194.429	Hannan-Quinn criter.		-6.158523
Durbin-Watson stat	2.445267			
Inverted AR Roots	-.30			
Inverted MA Roots	-.31			

Anexo 20 Modelo GARCH(1,1) Isa

Dependent Variable: DLISA  
Method: ML ARCH - Student's t distribution (BFGS / Marquardt steps)  
Date: 07/31/18 Time: 16:13  
Sample (adjusted): 7/02/2010 6/30/2017  
Included observations: 1683 after adjustments  
Convergence achieved after 58 iterations  
Coefficient covariance computed using outer product of gradients  
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
GARCH = C(3) + C(4)\*RESID(-1)^2 + C(5)\*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.061646	0.336828	-0.183019	0.8548
MA(1)	-0.011123	0.337359	-0.032970	0.9737
Variance Equation				
C	7.43E-06	2.24E-06	3.312440	0.0009
RESID(-1)^2	0.115599	0.021403	5.401128	0.0000
GARCH(-1)	0.870318	0.019033	45.72632	0.0000
T-DIST. DOF	4.175632	0.454785	9.181542	0.0000
R-squared	0.007127	Mean dependent var		3.38E-05
Adjusted R-squared	0.006536	S.D. dependent var		0.016997
S.E. of regression	0.016942	Akaike info criterion		-5.662580
Sum squared resid	0.482474	Schwarz criterion		-5.643228
Log likelihood	4771.061	Hannan-Quinn criter.		-5.655412
Durbin-Watson stat	2.031138			
Inverted AR Roots	-.06			
Inverted MA Roots	.01			

Anexo 21 Modelo GARCH(1,1) Grupo argos

Dependent Variable: DLGRUPOARGOS  
Method: ML ARCH - Normal distribution (BFGS / Marquardt steps)  
Date: 08/29/18 Time: 17:12  
Sample (adjusted): 7/02/2010 6/30/2017  
Included observations: 1683 after adjustments  
Convergence achieved after 49 iterations  
Coefficient covariance computed using outer product of gradients  
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
GARCH = C(4) + C(5)\*RESID(-1)^2 + C(6)\*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.035542	0.018434	-1.928016	0.0539
AR(2)	0.840504	0.108896	7.718420	0.0000
MA(2)	-0.849773	0.107224	-7.925227	0.0000
Variance Equation				
C	4.41E-05	6.70E-06	6.587977	0.0000
RESID(-1)^2	0.153285	0.018389	8.335636	0.0000
GARCH(-1)	0.687475	0.036027	19.08218	0.0000
R-squared	0.006572	Mean dependent var	5.27E-05	
Adjusted R-squared	0.005389	S.D. dependent var	0.016514	
S.E. of regression	0.016470	Akaike info criterion	-5.470776	
Sum squared resid	0.455706	Schwarz criterion	-5.451424	
Log likelihood	4609.658	Hannan-Quinn criter.	-5.463609	
Durbin-Watson stat	2.014528			
Inverted AR Roots	.90	-.93		
Inverted MA Roots	.92	-.92		

Anexo 22 Modelo GARCH(1,1) Grupo Aval

Dependent Variable: DLAVAL  
Method: ML ARCH - Student's t distribution (BFGS / Marquardt steps)  
Date: 08/29/18 Time: 17:16  
Sample (adjusted): 7/02/2010 6/30/2017  
Included observations: 1683 after adjustments  
Convergence achieved after 44 iterations  
Coefficient covariance computed using outer product of gradients  
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
GARCH = C(2) + C(3)\*RESID(-1)^2 + C(4)\*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.092037	0.024614	-3.739263	0.0002
Variance Equation				
C	0.000113	2.90E-05	3.902453	0.0001
RESID(-1)^2	0.337782	0.096616	3.496147	0.0005
GARCH(-1)	0.380641	0.079737	4.773677	0.0000
T-DIST. DOF	2.787312	0.235799	11.82073	0.0000
R-squared	0.015823	Mean dependent var	0.000185	
Adjusted R-squared	0.015823	S.D. dependent var	0.016420	
S.E. of regression	0.016290	Akaike info criterion	-5.881071	
Sum squared resid	0.446315	Schwarz criterion	-5.864944	
Log likelihood	4953.921	Hannan-Quinn criter.	-5.875098	
Durbin-Watson stat	2.083640			
Inverted MA Roots	.09			



Anexo 23 Modelo GARCH(1,0) Cementos Argos

Dependent Variable: DLCEMENTOS  
Method: ML ARCH - Student's t distribution (BFGS / Marquardt steps)  
Date: 08/30/18 Time: 17:06  
Sample (adjusted): 7/02/2010 6/30/2017  
Included observations: 1683 after adjustments  
Convergence achieved after 23 iterations  
Coefficient covariance computed using outer product of gradients  
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
GARCH = C(2) + C(3)\*RESID(-1)^2

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.040428	0.023642	-1.709976	0.0873
Variance Equation				
C	0.000231	2.14E-05	10.77046	0.0000
RESID(-1)^2	0.416074	0.086343	4.818871	0.0000
T-DIST. DOF	3.397929	0.240253	14.14311	0.0000
R-squared	0.014402	Mean dependent var		2.67E-05
Adjusted R-squared	0.014402	S.D. dependent var		0.025656
S.E. of regression	0.025471	Akaike info criterion		-5.504109
Sum squared resid	1.091230	Schwarz criterion		-5.491207
Log likelihood	4635.707	Hannan-Quinn criter.		-5.499330
Durbin-Watson stat	2.321014			
Inverted MA Roots	.04			

Anexo 24 Modelo GARCH(1,0) Banco Bogotá

Dependent Variable: DLBBOGOTA  
Method: ML - ARCH  
Date: 07/11/18 Time: 20:57  
Sample (adjusted): 7/02/2010 6/29/2017  
Included observations: 1682 after adjustments  
Convergence achieved after 24 iterations  
Coefficient covariance computed using outer product of gradients  
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
GARCH = C(3) + C(4)\*RESID(-1)^2

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.486100	0.199356	2.438358	0.0148
MA(1)	-0.594990	0.179588	-3.313089	0.0009
Variance Equation				
C	0.000207	7.62E-07	272.0516	0.0000
RESID(-1)^2	0.078351	0.015942	4.914673	0.0000
R-squared	0.060390	Mean dependent var		0.000283
Adjusted R-squared	0.059831	S.D. dependent var		0.017236
S.E. of regression	0.016712	Akaike info criterion		-5.589139
Sum squared resid	0.469223	Schwarz criterion		-5.576231
Log likelihood	4704.466	Hannan-Quinn criter.		-5.584358
Durbin-Watson stat	2.482195			
Inverted AR Roots	.49			
Inverted MA Roots	.59			

## BIBLIOGRAFÍA

- Alonso, J. C. (Diciembre de 2010). *Apuntes de Economía Universidad ICESI*. Obtenido de <https://www.icesi.edu.co/departamentos/economia/images/at25.pdf>
- Andrés Ramírez Hassan, M. S. (2012). Validación empírica del modelo CAPM para Colombia 2003-2010. *Ecós de Economía*, 49 - 74.
- Arce, R. d., & Mahía, R. (febrero de 2009). *Departamento de Economía Aplicada Universidad Autónoma de Madrid*. Obtenido de [https://www.uam.es/personal\\_pdi/economicas/rarce/pdf/heterocedasticidad.pdf](https://www.uam.es/personal_pdi/economicas/rarce/pdf/heterocedasticidad.pdf)
- Ariza G., M., & Cadena L., J. B. (2013). Selección de portafolios de renta variable: una propuesta a través de betas al alza y a la baja en el mercado económico. *Criterio Libre*, 225-243.
- Arody Ortiz Alvarado, L. E. (2015). PREDICCIÓN DE VOLATILIDAD DE LA RENTABILIDAD DIARIA DEL MERCADO DEL AZÚCAR Y SU APLICACIÓN EN LA RAZÓN DE COBERTURA. *Universidad de Medellín*, 105 - 136.
- Bahi, C. A. (2007). Modelos de medición de la volatilidad en los mercados de valores: Aplicación busatil Argentino. . Mendoza, Argentina.
- banrep. (18 de Agosto de 2018). *Banco de la República Colombia*. Obtenido de <http://www.banrep.gov.co/es/igbc>
- Bedoya Hermida, J. A. (2016). Aplicación del modelo de diversificación de cartera con valoración de activos financieros mediante el método de Media-Semivarianza y Downside Capital Asset Pricing Model para la construcción de portafolios de inversión eficientes en el mercado de renta v . Cuenca, Ecuador.
- Bezares, F. G., Madariaga, J. A., & Santibáñez, J. (2004). *Lecturas sobre Gestión de carteras*. Bilbao: Departamento de Finanzas de la Universidad Comercial de Deusto.
- blacklitterman.org. (20 de Junio de 2014). *blacklitterman.org*. Obtenido de <http://www.blacklitterman.org/index.html>
- Bollerslev. (1986). Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 307-327.
- Calderón Campos, J. A. (2016). *Eficiencia en modelos de asignación de portafolios*. Bogotá.
- Camargo, E. P., Fontanilla, A. C., & Luna, R. G. (2012). Modelación de la volatilidad y pronóstico del índice general de la bolsa de valores de Colombia (IGBC). *Clío América*, 223 - 239.
- Cárdenas, L. G., Zapata, J. M., Ríos, S. M., Padilla, C. L., Botero, J. E., & Cuervo, F. I. (2015). Modelo de selección de portafolio óptimo de acciones mediante el análisis de Black-Litterman. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín*, 111 - 130.

- Cifuentes, J. C., & Arcos, M. A. (2006). Cuatro hechos estilizados de las series de rendimientos: una ilustración para Colombia. *Estudios Gerenciales*, 103 - 124.
- Correa, C. A., Pérez, F. O., & Martínez, F. V. (28 de Marzo de 2014). *Análisis comparativo de modelos para estimar la distribución de la volatilidad de series financieras de rendimientos*. Obtenido de Munich Personal RePEc Archive: <http://mpa.ub.uni-muenchen.de/54845/>
- Cruz T., E. A., Restrepo C., J. H., & Medina V., P. D. (Septiembre de 2008). *Portafolio de inversión en acciones Un enfoque estadístico*. Pereira.
- Domínguez Mondragón, A. (Noviembre de 2015). *Modelo de Markowitz y simulación de Montecarlo aplicados a un portafolio de inversión con acciones del IPC 2013-2015*. Toluca, México.
- Engle, R. (2001). The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics. *Journal of Economic Perspectives—Volume 15, Number 4*, 157-168.
- Espectador, E. (13 de junio de 2017). *El Espectador.com*. Obtenido de <https://www.elespectador.com/economia/las-acciones-que-mas-prometen-en-la-bolsa-de-valores-de-colombia-articulo-698232>
- GrupoAval. (1 de Agosto de 2018). *Grupo Aval Acciones y Valores S.A*. Obtenido de <https://www.grupoaval.com/wps/portal/grupo-aval/aval/portal-financiero>
- Haro, A. d. (2008). *Medición y Control de Riesgos Financieros*. México: Limusa.
- Jorge Argáez Sosa, J. L. (2014). Un paseo por el modelo GARCH y sus variantes. *Abstraction & Application*, 35 – 50.
- López, H. y. (2009). Las interrelaciones de volatilidad y rendimientos entre los mercados de valores del TLCAN. *Investigación Económica LXVIII*, 83 - 114.
- Luis Franco Arbeláez, C. T. (2011). Modelo de Markowitz y Modelo de Black-Litterman en la Optimización de Portafolios de Inversión. *Tecno Lógicas*, 71-88.
- Manotas Duque, D. F., Estrada Bedón , A., & Uribe Rodríguez, J. A. (2011). Aplicación del coeficiente de Gini y la semivarianza como estimadores del riesgo en la selección de proyectos. *Ingeniería y competitividad*, 61-81.
- Miralles Marcelo, J. L., Miralles Quirós, M., & Miralles Quirós , J. L. (2007). Análisis Media-semivarianza: Una Aplicación a las Primas de Riesgo en el Mercado de Valores Español . *Estudios de Economía Aplicada*, 199-214.
- Monsegny, M. C., & Cuervo, E. C. (2008). MODELOS ARCH, GARCH Y EGARCH: APLICACIONES A SERIES FINANCIERAS. *Cuadernos de Economía*, 287 - 319.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica*, 347 - 370.

- Ospina Duque, V., & Tangarife Trujillo, V. E. (2008). Medición del VaR en los portafolios de acciones - Mercado Colombiano. Pereira, Risaralda.
- Peters, J.-P. (2001, Marzo 20). Estimating and forecasting volatility of stock indices using. Bélgica.
- Ramírez, F. O., & Castaño, H. F. (2006). Análisis de la volatilidad del índice general de la bolsa de valores de Colombia utilizando modelos arch. *Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal*, 13 - 33.
- Ramírez, S. L., & Jaramillo, M. T. (Agosto de 2015). *Grupo de investigación en Finanzas y Banca GYFB*. Obtenido de <http://www.eafit.edu.co/programas-academicos/pregrados/ingenieria-matematica/practicas-investigativas/Documents/aplicacion-modelo-black-litterman-mercado-renta.pdf>
- Rojas', A. E., & Palacios, Y. A. (2004). MODELOS ARCH: UNA APLICACIÓN EN EL PRONÓSTICO DE LA VOLATILIDAD DE ACCIONES COTIZADAS EN LA BOLSA DE VALORES DE LIMA. *PESQUIMAT*, 64 - 79.
- Ruiz, E. (1994). Modelos para series temporales heterocedásticas. *Cuadernos Económicos del ICE*, 73 - 108.
- Salazar, R. C., & Clement, A. (2014). Aplicación del modelo Black Litterman a la selección de portafolios internacionales. *Quipukamayoc. Revista de la Facultad de Ciencias Contables*, 113 - 120.
- Sánchez García, Y. (Octubre de 2015). *Evaluación del modelo de Markowitz con parámetros estimados por diferentes métodos*. México D.F.
- Segura, M. E. (Enero de 2009). Construcción y gestión de portafolios con el modelo Black-Litterman: Una aplicación a los fondos de pensiones obligatorias en Colombia . *Construcción y gestión de portafolios con el modelo Black-Litterman: Una aplicación a los fondos de pensiones obligatorias en Colombia* . Bogotá, Colombia.
- Silva, T., Pinheiro, P. R., & Poggi, M. (2017). A more human-like portfolio optimization approach. *European Journal of Operational Research*, 252 - 260.
- Tim Bollerslev Ray Y. Chou Kenneth F., K. (1992). ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, 5 - 59.
- Uribe, L. M., Martínez Damian, M. A., & Ramírez Valverde, G. (2009). Método de semivarianza y varianza para la selección de un portafolio óptimo. *REV. MEX. DE EC. AGRIC. Y DE LOS REC. NAT.*, 103 - 113.
- Uribe, L. M., Martínez Damián, M. A., & Ramírez Valverde, G. (2009). Método de Semivarianza y varianza para la selección de un portafolio óptimo. *REV. MEX. DE EC. AGRÍC. Y DE LOS REC. NAT.* , 103-113.

- Urzúa, M. G. (2012). Construcción de una cartera de inversión usando modelo GARCH. *Revista de la Facultad de Ingeniería Industrial*, 84-99.
- Vargas, A. S., & Martínez, O. R. (2006). Regularidades probabilísticas de las series financieras y la familia de modelos GARCH. *Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal*, 149 - 156.
- Vazquez, R. D., Valdes, A. L., & Porras, A. R. (17 de Abril de 2013). *Un modelo Garch con asimetría condicional autorregresiva para modelar series de tiempo: una aplicación para los rendimientos del índice de precios y cotizaciones de la BMV*. Obtenido de Munich Personal RePEc Archive: <http://mpa.ub.uni-muenchen.de/46328/>
- Zárate, F. J. (2015). Estimación de modelos multivariados GARH en los mercados accionarios de China y México. *Estadística: Finanzas y Riesgo*, 187 - 211.